



# Diffusion multiple et renversement du temps ultrasonore dans des milieux périodiques et désordonnés

François van Der Biest

## ► To cite this version:

François van Der Biest. Diffusion multiple et renversement du temps ultrasonore dans des milieux périodiques et désordonnés. Acoustique [physics.class-ph]. Université Paris-Diderot - Paris VII, 2005. Français. NNT: . tel-00011354v2

**HAL Id: tel-00011354**

**<https://theses.hal.science/tel-00011354v2>**

Submitted on 17 Jan 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE de DOCTORAT de l'UNIVERSITE PARIS 7 - DENIS DIDEROT

Ecole Doctorale : **Physique Macroscopique**  
Spécialité : **Acoustique Physique**

Présentée par :  
François VAN DER BIEST

Pour l'obtention du diplôme de Docteur de l'Université Paris 7

**Diffusion multiple et renversement du temps ultrasonore  
dans des milieux périodiques et désordonnés**

sous la direction de  
**Mathias FINK**

Soutenue le 24 octobre 2005 devant le jury composé de :

Jean-Claude BACRI	Président du Jury
Mathias FINK	Directeur de thèse
Vincent LAUDE	Membre du Jury
Arnaud TOURIN	Co-encadrant
Christian VANNESTE	Rapporteur
Jérôme VASSEUR	Rapporteur



*A mes parents ...*



# Table des Matières

<b>Remerciements</b>	<b>1</b>
<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>I Cristaux Phononiques</b>	<b>5</b>
<b>1 Histoire et état de l'art</b>	<b>9</b>
1.1 Emergence du concept de cristal phononique . . . . .	9
1.2 Etat de l'art et pistes de recherche actuelles . . . . .	11
<b>2 Caractérisation acoustique de cristaux phononiques</b>	<b>15</b>
2.1 Construction des échantillons et dispositif expérimental . . . . .	15
2.2 Mesure de la transmission . . . . .	17
2.3 Analyse de la phase . . . . .	19
2.3.1 Dispositif . . . . .	19
2.3.2 Résultats . . . . .	20
2.3.3 Relations de dispersion . . . . .	22
2.4 Mise en évidence de l'effet tunnel . . . . .	23
2.4.1 Définition de la vitesse de groupe . . . . .	24
2.4.2 Dispositif expérimental . . . . .	24
2.4.3 Causalité . . . . .	26
<b>3 Modélisation d'un monocristal</b>	<b>31</b>
3.1 Modèle acoustique unidimensionnel . . . . .	31
3.2 Développement en ondes planes . . . . .	35
3.3 Théorie self-consistante de la diffusion multiple . . . . .	40
3.3.1 Mise en oeuvre de l'algorithme numérique . . . . .	43
3.3.2 Sections efficaces différentielles et nombre de modes . . . . .	44
3.3.3 Résultats . . . . .	45
3.4 Simulation aux différences finies . . . . .	49

<b>4</b>	<b>Fabry-Pérot acoustique</b>	<b>57</b>
4.1	Dispositif expérimental . . . . .	58
4.2	Résonances Fabry-Pérot en transmission . . . . .	59
4.2.1	Dimension de la cavité . . . . .	60
4.2.2	La question de l'absorption . . . . .	61
4.3	Effet tunnel résonant . . . . .	62
4.3.1	Modèle quantique d'une double barrière de potentiel . . . . .	64
4.3.2	Temps de groupe aux résonances du Fabry-Pérot acoustique . . . . .	66
4.4	Modes de résonance de la cavité . . . . .	70
<b>5</b>	<b>Retournement temporel et cristaux phononiques</b>	<b>75</b>
5.1	Présentation du retournement temporel . . . . .	75
5.1.1	Le retournement temporel en acoustique . . . . .	75
5.1.2	Dispositif expérimental et formalisme de la réponse impulsionnelle . . . . .	77
5.1.3	Retournement temporel en milieu désordonné . . . . .	79
5.2	Retournement temporel dans les cristaux : cas d'une source à l'extérieur du cristal . . . . .	83
5.2.1	Expériences et résultats . . . . .	83
5.2.2	Compressions temporelles . . . . .	84
5.2.3	Focalisations spatiales . . . . .	87
5.2.4	Retournement temporel dans la bande interdite . . . . .	91
5.3	Retournement temporel dans les cristaux : cas d'une source au sein du cristal . . . . .	96
5.3.1	Expression de la focalisation spatiale . . . . .	96
5.3.2	Focalisation spatiale dans un cristal phononique . . . . .	97
	<b>Bibliographie</b>	<b>102</b>
<b>II</b>	<b>Nuages de bulles</b>	<b>109</b>
<b>1</b>	<b>Diffusion multiple et nuages de bulles</b>	<b>113</b>
1.1	Libre parcours moyen . . . . .	113
1.2	Etude d'une bulle . . . . .	116
1.2.1	Résonance . . . . .	116
1.2.2	Sections efficaces . . . . .	118
1.2.3	Non-linéarités . . . . .	120
1.3	Etude et conception du dispositif expérimental . . . . .	122
<b>2</b>	<b>Caractérisation du milieu</b>	<b>129</b>
2.1	Caractérisation d'une population de bulles . . . . .	129
2.1.1	Méthodes optiques . . . . .	129
2.1.2	Méthodes acoustiques linéaires . . . . .	133

2.1.3	Méthodes acoustiques non-linéaires . . . . .	134
2.2	Onde cohérente . . . . .	142
2.3	Modèle de Foldy . . . . .	143
2.4	Détermination de la fraction volumique d'air . . . . .	148
2.5	Diffusion multiple et non-linéarités . . . . .	150
2.5.1	Sur le milieu caractérisé . . . . .	150
2.5.2	Avec une densité plus importante . . . . .	154
<b>Bibliographie</b>		<b>162</b>
<b>Conclusion</b>		<b>167</b>
<b>A Table des constantes</b>		<b>169</b>
<b>B Annexe à la méthode de développement en ondes planes</b>		<b>171</b>
<b>C Barrière de potentiel en mécanique quantique</b>		<b>173</b>
<b>D Profondeur de champ d'un système optique</b>		<b>175</b>





# Remerciements

Je souhaite tout d'abord remercier Mathias Fink et Arnaud Tourin pour m'avoir proposé un sujet de thèse ambitieux et accordé tant de confiance. Je leur suis également redevable de la liberté dont j'ai pu bénéficier dans la conduite de mon projet de thèse.

Toute l'équipe du LOA qui gravite autour du sujet "ondes en milieux complexes" a également contribué à transformer cette thèse en une formation enrichissante. Citons ici l'inénarrable Arnaud Derode, spécialiste du retournement temporel au verbe équivoque ; Julien de Rosny, philosophe devant l'éternel, expert en DLL et redoutable adversaire au baby ; Gabriel Montaldo, enfin, amateur du chocolat de 16H et expérimentateur de grand talent.

J'ai également apprécié le travail en collaboration avec l'équipe de John Page, qui a été porteur de nombreuses idées nouvelles.

Souhaitons une bonne fin de PhD à son étudiant, Alexei Sukhovitch.

Que Michel Parise soit ici remercié pour les multiples usinages de pièces qui ont été nécessaires pour mener à bien mes expériences. Ceux-ci ont toujours été réalisés avec un grand soin.

Une pensée spéciale pour tous les thésards du labo avec lesquels j'ai eu l'occasion de partager mes états d'âme et autres questionnements existentiels : Julien Anfosso, Jean-Luc Gennisson, Xavier Jacob, Nicolas Quieffin, Jérémy Bercoff, Mathieu Pernot, Samir Guerbaoui, Eric Larose, Delphine Palacio, François Vignon, Victor Mamou, Jean-Gabriel Minonzio, Guillemette Ribay, Geoffroy Lerosey, Mathieu Renier ... sans oublier la jeune génération qui vient de prendre le relais ... Fabrice, Benjamin, Frank, Alexandre : souhaitons leur bonne chance dans la recherche.

Une mention particulière pour Valentin Leroy, grand spécialiste des nuages de bulles, dont le travail de thèse m'a beaucoup aidé à comprendre mes résultats expérimentaux, et qui a rejoint le LOA avant de s'envoler pour ... Winnipeg, Canada !

Merci également aux stagiaires dont j'ai pu participer à l'encadrement, et qui m'ont souvent permis de réaliser de grandes avancées théoriques et expérimentales : Gillian Boccara, Kevin Baillie, Kahina Bessa, Cédric Chanal ... Chaque stage a également été l'occasion de remettre en cause mes connaissances et résultats, et c'est toujours une bonne chose.

Devant Didier Cassereau (alias *dieu@loa.espci.fr*), nous devons tous nous baisser bien bas et

saluer le courage d'avoir si longtemps administré un réseau hétérogène d'ordinateurs et répondu aux attentes de ses utilisateurs.

Merci également de m'avoir laissé les commandes de *mailhost* le temps d'installer un wiki qui, je l'espère, saura trouver son utilité au sein du laboratoire.

Je n'oublie pas de citer Mickaël Tanter auquel nous devons tous ce merveilleux logiciel de simulation qu'est Acel ; Claire Prada avec qui j'ai réalisé des expériences au caractère "exploratoire" sur les nuages de bulles ; Dominique Clorennec, notre breton aux adorables bambins photogéniques et Jean-François Aubry à l'extrême gentillesse.

Remercions enfin Patricia Daenens et Arnaude Cariou pour toutes les choses qui font que "le labo tourne", et aussi pour l'animation autour de la table aux alentours de midi.

Je souhaite maintenant témoigner toute ma gratitude envers mes parents qui ont toujours été à mon écoute, et qui m'ont particulièrement soutenu tout au long de la rédaction de ce manuscrit. Celui-ci leur est dédié.

Une mention spéciale pour François Detcheverry, camarade de galère et grand ami avec lequel j'aimais me retrouver au Jardin des Plantes le midi pour partager un sandwich et deviser devant les merveilles de la Nature.

Michel, Marie-France, Pascal, Clémentine et Tom (!), vous avez su m'accueillir et me comprendre. Pour cela, et toutes les autres choses que je ne peux écrire, mille fois merci.

Enfin, je ne remercierai jamais assez ma compagne, Muriel, qui m'a tant apporté.

# Introduction

La propagation d'ondes dans des milieux hétérogènes, désordonnés ou périodiques, est un sujet très général qui se trouve au confluent de nombreuses disciplines de la physique. Ainsi, qu'il s'agisse de la propagation d'électrons dans un métal pur ou contenant des impuretés, d'une onde lumineuse dans du lait ou bien encore d'une onde élastique dans un acier à grains, les formalismes utilisés sont analogues. Au Laboratoire Ondes et Acoustique, nous abordons ce sujet de façon originale en profitant, d'un point de vue expérimental, de l'utilisation de réseaux de transducteurs piézo-électriques pour cartographier l'amplitude et la phase de toutes les composantes spectrales du champ acoustique diffusé. Nous avons ainsi pu étudier les problèmes de cohérence et de réversibilité de champs ondulatoires complexes à des échelles millimétriques, pour lesquelles les paramètres expérimentaux sont aisément contrôlables.

En particulier, au cours de thèses précédentes effectuées au laboratoire, il a été mis en évidence les conséquences de deux propriétés fondamentales, la réciprocité et la réversibilité, sur la propagation acoustique dans des milieux désordonnés en régime de diffusion multiple. La réciprocité trouve sa manifestation dans l'effet de rétrodiffusion cohérente que l'on peut exploiter dans la pratique pour mesurer les paramètres de transport (libre parcours moyen et constante de diffusion) caractéristiques du milieu. L'invariance par renversement du temps de l'équation de propagation autorise quant à elle la possibilité de faire revivre son passé à une onde ultrasonore et de la faire ainsi refocaliser sur sa source. Dans ce cadre, il a été montré que l'on pouvait tirer profit du caractère désordonné du milieu pour obtenir une meilleure résolution spatiale que celle obtenue en milieu homogène.

Au cours de cette thèse, nous avons étudié la diffusion multiple des ultrasons dans des structures périodiques, autrement appelées "cristaux phononiques". L'objectif était de construire et de caractériser des matériaux phononiques à bandes interdites, c'est-à-dire des milieux périodiques capables de bloquer sélectivement la propagation acoustique dans une plage de fréquences donnée.

D'autre part, nous avons cherché à mettre en évidence le caractère non-linéaire de la propagation acoustique dans les milieux multiplement diffuseurs désordonnés que sont les nuages de bulles. A cette occasion, nous avons mis en place plusieurs outils ainsi qu'un montage expérimental permettant de caractériser la distribution des bulles créées.



**Première partie**

**Cristaux Phononiques**



Les cristaux phononiques sont des matériaux composites macroscopiques présentant une périodicité spatiale dans une ou plusieurs directions de l'espace. En tant que tels, ils sont capables de bloquer la propagation acoustique dans certaines directions et gammes de fréquences, par le biais de réflexions de Bragg. On parle alors de bande de fréquences interdites, que l'on abrège le plus souvent en "bande interdite".

Dans un premier chapitre, nous nous attachons à présenter un rapide historique de l'étude foisonnante des cristaux phononiques, et nous instruisons les principales pistes de recherches et résultats issus du travail de la communauté "cristaux phononiques".

Dans un deuxième temps, nous détaillons l'étude des cristaux phononiques initiée au sein du Laboratoire Ondes et Acoustique sur des structures bidimensionnelles de tiges d'acier immergées. Cela nous permet de retrouver des résultats caractéristiques de ces milieux, tels que atténuation, dispersion anormale et effet tunnel.

Afin de conforter nos premiers résultats expérimentaux sur des monocristaux, nous faisons ensuite appel à des outils de simulation numérique dont la complexité n'a d'égal que la fidélité aux expériences.

Par la suite, nous mettons en évidence des résultats originaux obtenus sur des arrangements de cristaux de type Fabry-Pérot, ce qui est l'occasion de valider nos modèles et simulations sur des structures complexes.

Enfin, cette étude des cristaux phononiques au sein du LOA ne serait pas complète si nous n'y avions inclus l'ingrédient du Retournement Temporel comme outil d'investigation supplémentaire mais également sujet d'étude.





# Chapitre 1

## Histoire et état de l'art

### 1.1 Emergence du concept de cristal phononique

En acoustique, l'intérêt pour les structures périodiques s'est manifesté à partir des années 1970 pour des raisons aussi fondamentales qu'appliquées. On peut citer par exemple les travaux de L. P. Solie [1] sur les filtres à ondes de surface, ceux de J. D. Achenbach [2] concernant le calcul des relations de dispersion de matériaux possédant des inclusions sphériques périodiques ou encore ceux de V. Narayanamurti [3] relatifs à des filtres phononiques utilisant des superréseaux en AsGa.

Le renouveau du domaine, au début des années 1990, fait suite à l'intérêt manifesté par la communauté des opticiens pour des matériaux composites constitués d'arrangements périodiques de diffuseurs diélectriques, autrement appelés **cristaux photoniques**.

Initialement, les cristaux photoniques ont été conçus dans l'objectif d'interdire la désexcitation radiative d'un atome en empêchant la propagation des photons qu'il est susceptible d'émettre. En effet, l'émission spontanée des atomes est assujettie à la présence de modes électromagnétiques d'énergie égale à celle de la transition électronique. Piéger l'atome dans un milieu présentant une bande interdite photonique couvrant l'énergie de la transition devait alors garantir l'absence de désexcitation. Cette idée fut introduite par Eli Yablonovitch [4], ouvrant ainsi la voie aux premières réalisations expérimentales de cristaux photoniques [5]. Ces dispositifs laissent entrevoir la possibilité de réaliser des composants optiques très efficaces.

L'intérêt pour ce genre de cristaux était également d'ordre théorique, puisque le fait d'introduire graduellement du désordre dans un milieu ordonné a été considéré comme un moyen d'atteindre le régime de localisation d'Anderson [6, 7]. Une analogie a par ailleurs été formulée par Economou [8] entre les bandes interdites et les régions d'états localisés dans les milieux désordonnés. Tous deux trouvent en effet leur origine dans les phénomènes d'interférences des ondes multiples diffusées.

Le point de départ de l'engouement pour les **cristaux phononiques**, postérieur à l'apparition des cristaux photoniques synthétiques, peut être fixé vers 1993. A cette date, M. S. Kushwaha publie un article présentant le calcul de la structure de bandes d'un matériau composite

périodique constitué de cylindres de nickel dans une matrice d'aluminium. Il met ainsi en évidence, pour la première fois, un matériau composite présentant une **bande interdite absolue** pour les ondes transverses [9], c'est-à-dire capable de bloquer la propagation des ondes incidentes quelle que soit leur direction.

Comme souvent, ce sont des papiers théoriques qui ouvrent un nouveau sujet, et il fallut attendre près de deux ans (et la publication de 9 articles) pour que paraisse une première communication présentant des travaux expérimentaux similaires dans le domaine de l'acoustique audible. Des mesures ont été réalisées sur une structure objectivement non prévue pour cela, puisqu'il s'agit d'une sculpture minimaliste de l'artiste Eusebio Sempere exposée dans les jardins de la Juan March Foundation à Madrid. Cette sculpture, constituée de cylindres d'acier de 2,9 cm de diamètre répartis selon un réseau carré simple de pas 10 cm, présente des atténuations marquées à 1,7 et 2,4 kHz, reliées à la diffraction sur les plans cristallographiques [100] et [110]. Une étude théorique postérieure [10] montre qu'il ne s'agit pas de bandes interdites totales, mais plutôt de pseudo-gaps\*, car l'atténuation introduite par la structure dépend de la direction du vecteur d'onde incident.

L'avantage des cristaux phononiques sur leurs homologues optiques apparaît tout d'abord à la fabrication : la structuration a lieu à des échelles macroscopiques, en rapport avec la longueur d'onde atténuée†, donc aisément contrôlable. Ensuite, du point de vue de la mesure, les acousticiens ont à leur disposition l'amplitude et la phase grâce aux transducteurs piézoélectriques, tandis que les détecteurs optiques sont intrinsèquement limités à la mesure de l'intensité du champ. Enfin, nous verrons que les paramètres mis en jeu dans l'apparition de bandes interdites sont beaucoup plus riches en acoustique qu'en optique.

Toutes ces raisons expliquent l'engouement passé et actuel pour les cristaux phononiques : la physique est souvent comparable à celle des cristaux photoniques, mais la facilité de réalisation est évidente et les mesures sont réalisées avec du matériel souple d'utilisation. Les cristaux phononiques sont donc particulièrement adaptés à la modélisation et la compréhension des phénomènes physiques sous-jacents. Le développement des applications envisagées jusqu'ici (création d'environnement dépourvu de vibrations, filtrage acoustique ainsi que l'optimisation des réseaux de transducteurs) reste en effet à un stade peu avancé.

Les cristaux photoniques jouissent quant à eux d'un excellent transfert technologique‡. Ils sont déjà utilisés dans des fibres optiques à bas indice, actuellement commercialisées (voir la figure 1.1). D'autres applications sont envisagées à court terme, dans le domaine des lasers et des diodes LED à haut rendement, des multiplexeurs et démultiplexeurs tout optiques, mais également en tant que dispositif anti-fraude dans les cartes de crédit.

---

\*également appelés *stopband*, ou bande interdite partielle

†sauf exception, dont nous parlerons dans la section suivante

‡La Nature n'a pas attendu l'Homme pour découvrir l'intérêt des cristaux photoniques, puisqu'elle en fait grand usage, par exemple dans les ailes de certains papillons (*Morpho rhetenor*) [11] et les poils d'animaux marins du genre *Aphrodita* [12].

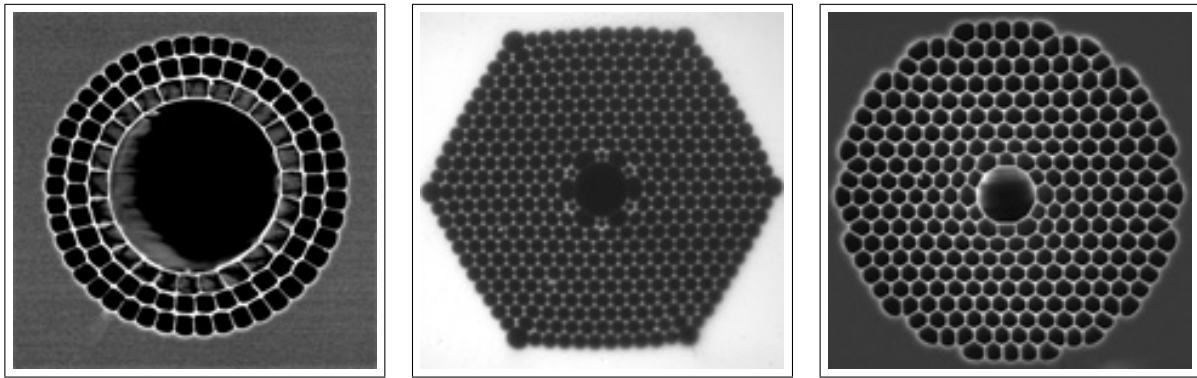


FIG. 1.1 – Sections de trois types de fibres à cristaux photoniques (PCF) commercialisées par [http ://www.crystal-fibre.com/](http://www.crystal-fibre.com/)

## 1.2 Etat de l'art et pistes de recherche actuelles

Les recherches menées depuis maintenant plus d'une décennie sur les cristaux phononiques ont vu l'aboutissement de nombreuses idées. Parmi celles ci, notons la possibilité d'atténuer les ondes dans de larges gammes de fréquences, et pour toute direction incidente, avec des cristaux phononiques présentant une bande interdite totale [9, 13, 14].

Les paramètres régissant l'obtention de bandes interdites totales ont fait l'objet d'études approfondies [9, 15, 16, 17]. Les paramètres ayant une influence significative sont la topologie du réseau, le contraste de vitesse et de densité et la fraction volumique de diffuseurs.

La topologie *cermet*, constituée de diffuseurs isolés, semble généralement préférable à la topologie *réseau*, dans laquelle les diffuseurs sont interconnectés. Diminuer la symétrie de la maille semble généralement fournir de bons résultats : un arrangement cubique à faces centrées est *a priori* plus favorable qu'un arrangement cubique simple ou centré.

En ce qui concerne les composites solide-solide, un contraste de densité important est crucial pour l'apparition de bandes interdites totales. Plus spécifiquement, des diffuseurs de forte densité dans une matrice de faible densité semblent extrêmement favorables, alors que c'est l'opposé pour les composites liquide-liquide.

Quant à la fraction volumique optimale d'apparition d'une large bande interdite absolue (définie par le rapport de sa largeur sur sa fréquence centrale), elle s'étend de 10 à 50 %, et dépend fortement des autres paramètres.

D'autres types de cristaux permettent d'atténuer efficacement des fréquences dont les longueurs d'ondes sont de deux ordres de grandeur supérieures au pas de la structure ( $a$ ) : ce sont les cristaux phononiques munis d'unités localement résonantes [18, 19, 20]. Ce concept repose sur la présence de diffuseurs résonants au sein d'une structure périodique : la réponse linéaire d'un tel diffuseur s'établit en  $1/(\omega_0^2 - \omega^2)$ , ce qui permet au matériau de présenter des constantes élastiques effectives négatives dans certaines gammes de fréquences. En cela, le principe de fonctionnement de ces structures est extrêmement proche des phénomènes physiques

qui gouvernent l'atténuation à la traversée d'un nuage de bulles résonantes. De tels cristaux ont été construits par l'équipe de Liu, en utilisant comme diffuseurs des billes métalliques denses enrobées d'un matériau mou, noyées dans une matrice en résine époxy. Ceux-ci ouvrent d'intéressantes perspectives en termes de filtrage dans le domaine de l'audio puisqu'ils permettent de s'affranchir de la condition  $\lambda \approx a$  : les fréquences atténuées par le prototype se situent en effet autour de 400 Hz et 1,3 kHz pour un réseau cubique de période 1,55 cm.

En vue d'applications de type "commutation de faisceaux", des cristaux phononiques à bande interdite ajustable ont été développés. La rotation de diffuseurs de section carrée est la solution retenue par C. Goffaux [21]. Une rotation de 45 degrés de tous les diffuseurs d'un cristal de maille carrée permet d'ouvrir une large bande interdite. Avec une telle technique, il devient possible de commander à distance le filtrage d'un faisceau sonore.

Des lentilles acoustiques ont également été fabriquées, en exploitant deux phénomènes physiques distincts. Pour des fréquences très inférieures à la première bande interdite, les ondes perçoivent le cristal comme un milieu effectif caractérisé par un indice de réfraction moyen. Pour peu que cet indice de réfraction soit supérieur à celui du milieu environnant, et que le contraste d'impédance ne soit pas trop élevé, il est possible de construire une lentille acoustique convexe qui focaliserait une onde plane incidente au point focal [22, 23]. Alors que cette expérience relève du domaine de l'acoustique géométrique, il existe une autre méthode, basée sur l'anisotropie des surfaces équifréquences. L'équipe du professeur John Page utilise cette technique au dessus de la première bande interdite pour focaliser naturellement un faisceau incident divergent à l'aide d'un échantillon plan de cristal tridimensionnel [24]. En cela, l'analogie avec les matériaux à indice de réfraction négatif (*LHM*) est forte [25, 26, 27].

Les cristaux à bande interdite totale sont également de bons candidats pour réaliser des guides d'ondes : il est désormais possible de modifier la direction d'un faisceau sonore grâce à des guides en forme de L [28, 29]. Des arrangements de cristaux ont également été conçus, qui permettent de modifier la direction de propagation sans requérir de bande interdite totale [30].

Enfin, la communauté dispose maintenant de méthodes numériques efficaces pour simuler la propagation au sein des cristaux phononiques : les codes aux différences finies dans le domaine temporel (*FDTD* pour *Finite Difference Time Domain*) sont les plus employés [31]. Ces études sont d'une grande importance en vue d'applications telles que les guides d'ondes et autres filtres résonants [32, 33], puisqu'ils permettent non seulement de cartographier le champ dans des structures de géométrie complexe, mais également de déterminer la transmission d'échantillons en conditions réelles.

Sur un plan plus fondamental, il est intéressant d'étudier l'analogie qui peut être faite entre le mécanisme de "propagation" d'une impulsion ultrasonore à travers un cristal phononique et le comportement d'un paquet d'onde au sein d'une barrière de potentiel en mécanique quantique [34]. Dans les deux cas, le temps d'arrivée du maximum du paquet d'onde devient indépendant de la largeur de la barrière au-delà d'une certaine épaisseur, ce qui est la signature de l'effet

tunnel.

Au cours de cette thèse, nous avons entre autres prolongé l'étude de la propagation d'un paquet d'onde au sein d'un cristal phononique à des structures de type Fabry-Pérot. Alors que l'effet tunnel se traduit par un avancement temporel du maximum des paquets d'onde, l'effet tunnel résonant se manifeste dans un Fabry-Pérot acoustique par un retard important à la traversée de paquets d'onde de fréquences correspondant aux résonances de la structure [35], ce qui justifie l'appellation "*Slow Sound*".



# Chapitre 2

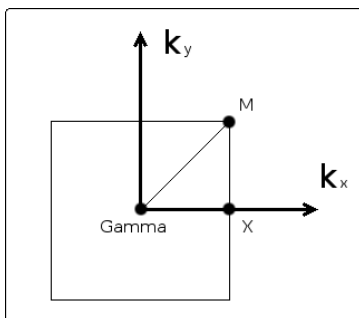
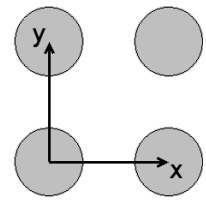
## Caractérisation acoustique de cristaux phononiques

Au cours de cette thèse, nous avons construit et caractérisé des cristaux phononiques. Nous présentons dans ce chapitre le dispositif expérimental ainsi que les principaux résultats expérimentaux obtenus sur les monocristaux que nous avons conçus.

### 2.1 Construction des échantillons et dispositif expérimental

La solution technologique retenue pour la conception des cristaux consiste en des arrangements périodiques de tiges d'acier dans l'eau. La longueur des tiges étant importante devant leur section, la géométrie des échantillons est bidimensionnelle. A l'image des arrangements cristallins étudiés en physique des solides, il est alors possible de définir un réseau direct et un réseau réciproque. Comme nous le verrons par la suite, l'intérêt du réseau réciproque apparaît à partir du moment où on étudie l'interaction d'une onde avec la structure périodique.

Le réseau de Bravais de la structure est un réseau carré simple de pas  $a = 1,5$  mm. Le cristal est défini par le réseau, additionné d'un motif constitué d'une tige cylindrique de diamètre 0,8 mm. Il est alors naturel de choisir comme base de l'espace direct le couple de vecteurs orthogonaux  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$ , de norme  $a$ , joignant les centres de diffuseurs adjacents (figure ci-contre).



Dans l'espace réciproque, les vecteurs de base  $\vec{k}_x$  et  $\vec{k}_y$  sont tels que  $\vec{k}_x = 2\pi/a \vec{x}$  et  $\vec{k}_y = 2\pi/a \vec{y}$ . La première zone de Brillouin (BZ1) est carrée, de paramètre  $2\pi/a$ . Les points de haute symétrie de cette maille primitive sont nommés  $\Gamma$ ,  $X$  et  $M$  (figure ci-contre), et leurs coordonnées respectives dans le réseau réciproque  $(\Gamma, \vec{k}_x, \vec{k}_y)$  sont  $(0,0)$ ,  $(\frac{1}{2}, 0)$  et  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ .



Deux types d'échantillons ont été réalisés : l'un présente une face normale à la direction  $\Gamma X$  (autrement appelée "direction  $[10]$ "), l'autre présente une face normale à la direction  $\Gamma M$  (ou direction  $[11]$ ). L'intérêt de cette double réalisation est que l'on peut caractériser le cristal phononique selon ses directions cristallographiques principales, puisqu'il suffit alors d'insonifier chacun des échantillons avec une onde plane.

Les tiges sont maintenues en place par l'intermédiaire de plaques d'époxy munies d'entretôises (figure 2.1). Les plaques ont été percées selon la géométrie désirée à l'aide d'une machine outil à commande numérique. Enfin, l'échantillon est tenu en position verticale grâce à un support en plexiglass.

Les matériaux et paramètres du cristal ont été choisis de telle sorte que la première bande interdite soit observable dans la gamme des fréquences accessibles aux transducteurs du laboratoire. En l'occurrence, ce choix résulte d'un compromis puisque la bande interdite se situe dans la gamme des plus basses fréquences ultrasonores accessibles à nos capteurs (500 kHz). Ce choix nous a permis de disposer d'une grande autonomie dans la construction des échantillons, puisque la période du cristal n'impliquait pas l'utilisation de matériel sophistiqué pour leur usinage.

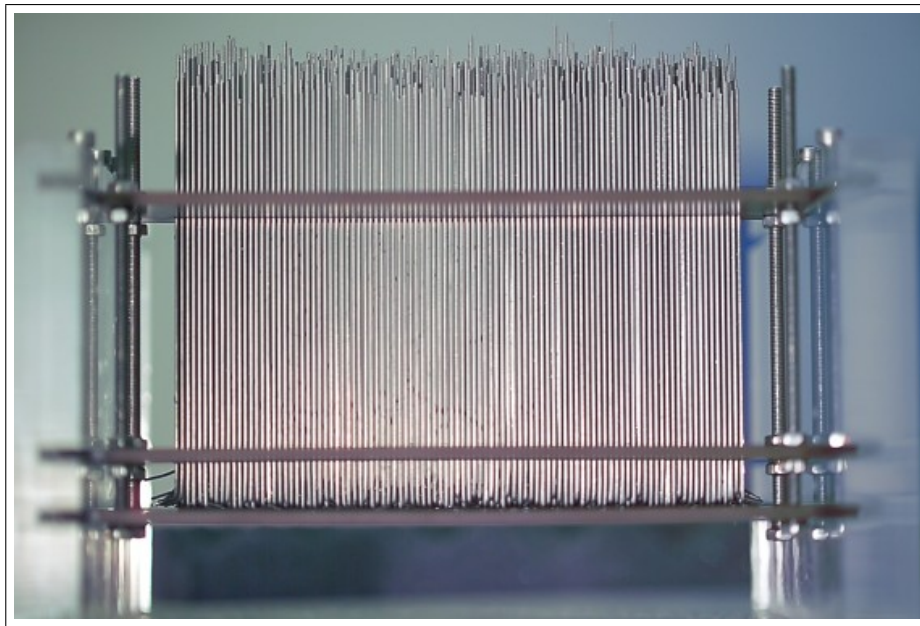


FIG. 2.1 – Cristal phononique constitué de 8 rangées de 100 tiges, monté sur son support en plexiglass.

Pour les expériences réalisées en transmission, chacun des cristaux est immergé dans une cuve d'eau, et placé à la distance de Fresnel d'un transducteur de fréquence centrale 500 kHz et de gros diamètre (38 mm). La divergence du faisceau est alors très faible et l'on peut considérer en première approximation que l'échantillon est éclairé par une onde quasi-plane. La zone utile du cristal étant délimitée par les plaques d'époxy, il faut s'assurer que le faisceau incident soit

suffisamment collimaté afin de ne pas créer de réflexions parasites. Le transducteur source est excité en régime impulsionnel par un signal bref, souvent une période de sinusoïde. On dispose ainsi d'une bande passante large (de l'ordre de 60%), ce qui nous permet d'obtenir facilement des données pour toute une gamme de fréquences en une seule expérience.

Un petit monoélément de dimensions 3x12 mm mesure l'onde transmise en champ lointain du cristal (quelques dizaines de centimètres). Le signal est préamplifié puis numérisé sur 12 bits avec une fréquence d'échantillonnage de 25 MHz. Cette numérisation des signaux permet d'atteindre un rapport signal sur bruit théorique de 72 dB, avec une qualité d'échantillonnage temporel très appréciable autour de 500 kHz. Au cours des premières expériences, il est apparu que le rapport signal sur bruit et la linéarité de l'électronique sont des paramètres importants, dans la mesure où les signaux mesurés en transmission peuvent être très faibles.

Pour s'affranchir des imperfections des cristaux, nous avons toujours enregistré l'onde cohérente, c'est à dire l'onde qui résiste à la moyenne sur le désordre. La procédure consiste à déplacer simultanément le couple émetteur/récepteur parallèlement aux faces du cristal et à moyenner les acquisitions. Le pas du déplacement doit alors respecter la périodicité du cristal, soit 1,5 mm : cette technique permet de s'assurer que le signal enregistré est indépendant d'éventuels défauts du cristal en restaurant la symétrie par translation. Le signal de référence est acquis dans l'eau, en suivant le même protocole.

## 2.2 Mesure de la transmission

Les signaux temporels (figure 2.2) enregistrés à travers un échantillon de 8 rangées de tiges présentent un front balistique fortement atténué, suivi de plusieurs centaines de microsecondes de signal. Les échos arrivant à des temps supérieurs à la propagation en champ libre sont la signature de la diffusion multiple : ils résultent de chemins de diffusion impliquant plusieurs diffuseurs.

Une analyse par transformée de Fourier (TF) permet d'extraire l'information fréquentielle. L'atténuation est alors obtenue en calculant le rapport des amplitudes des transformées de Fourier des signaux mesurés à travers l'échantillon et le signal de référence (figure 2.3).

Comme nous pouvions nous y attendre au vu de la faible fraction surfacique de diffuseurs (22%), les bandes de fréquences interdites mesurées dans les directions cristallographiques principales ne se recouvrent pas : nous avons donc construit un cristal présentant une bande interdite partielle (*stopband*) dans la direction  $\Gamma X$ , qui s'étend sur la gamme de fréquences [400-580 kHz]. L'atténuation est maximale (-39 dB) autour de 480 kHz pour un échantillon de 8 rangées de tiges.

Si le profil de l'atténuation mesurée dans la direction  $\Gamma M$  nous permet d'identifier des bandes de fréquences plus ou moins fortement atténuées, cette mesure n'est en revanche pas suffisante pour identifier avec précision une bande interdite : nous verrons comment y remédier dans la section suivante.

Il existe une image simple permettant de comprendre la forte atténuation introduite par

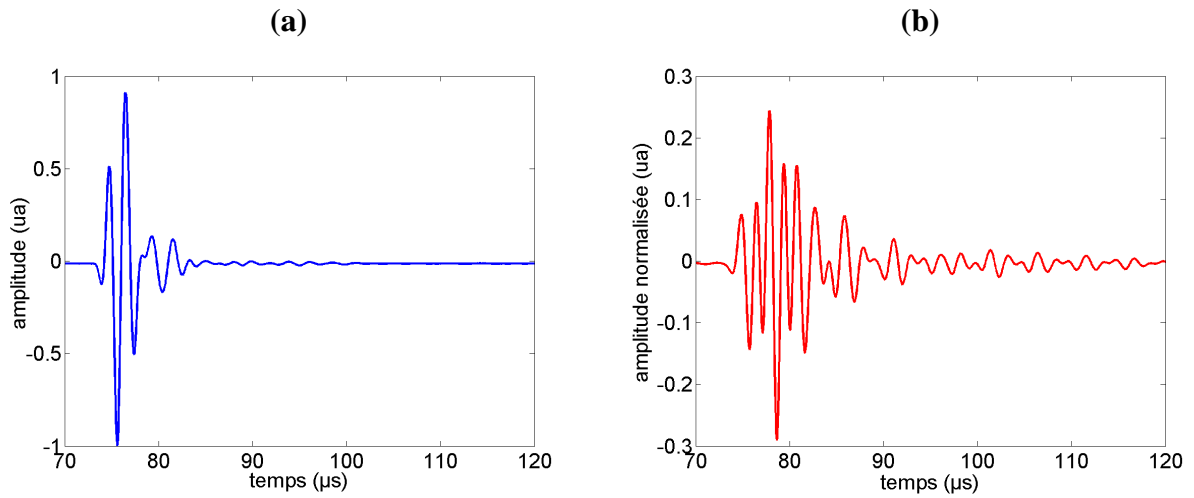


FIG. 2.2 – Signaux mesurés en transmission dans l'eau (a) et à travers l'échantillon de 8 rangées présentant une face [10] (b). L'échelle utilisée pour les deux graphes est la même.

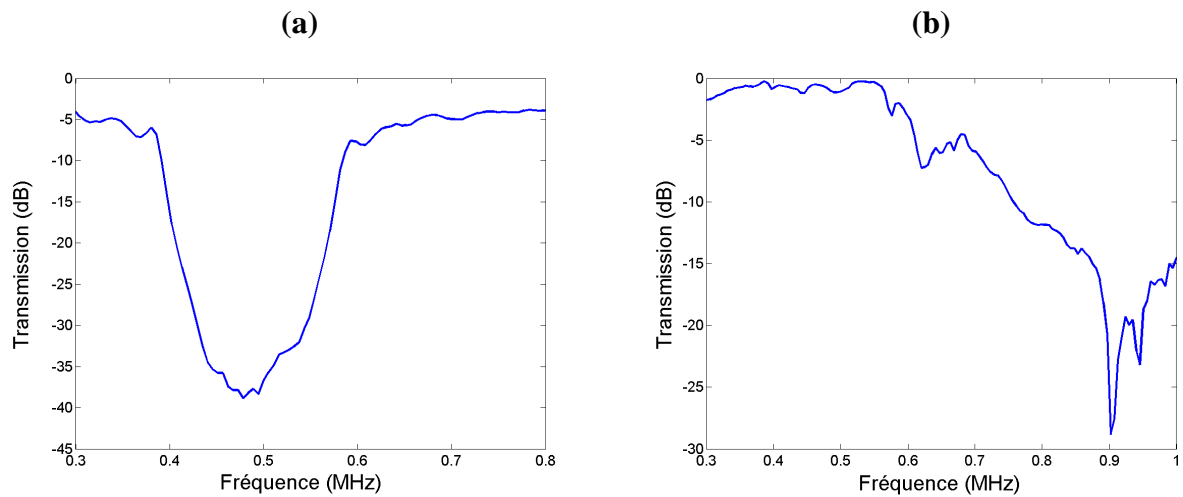


FIG. 2.3 – Coefficients de transmission en amplitude, montrant l'atténuation introduite par le réseau périodique dans les directions cristallographiques  $\Gamma X$  (a) et  $\Gamma M$  (b), mesurée sur les deux échantillons préparés à cet effet (respectivement 8 et 10 rangées de tiges)

un cristal phononique en transmission : quand la longueur d'onde correspond au double de la distance entre deux plans successifs de diffuseurs (autrement appelés "plans réticulaires"), les ondes diffusées interfèrent destructivement dans la direction de propagation. Dans la direction opposée, les interférences sont constructives et contribuent à la forte réflectivité du cristal. En première approximation, ce mécanisme conduit à une relation entre la fréquence centrale de la bande de fréquences atténuée  $\nu$  et la périodicité du cristal :  $\nu = c/2a$ , où  $c$  est la vitesse de phase dans l'eau. Pour nos échantillons, cette formule prévoit une première bande interdite autour de 500 kHz, ce qui s'avère correct à 4%. Cette relation est cependant approximative car elle ne prend pas en compte la géométrie ni la vitesse du matériau des diffuseurs, ce qui peut conduire à de larges différences pour des fractions surfaciques élevées de diffuseurs.

Pour des cristaux d'épaisseur importante, le phénomène d'interférences est d'autant plus prononcé, ce qui diminue la transmission et augmente la réflexion. Imaginons un cristal parfait occupant un demi-espace : toute onde de fréquence comprise dans la bande interdite serait alors parfaitement réfléchi par la structure. Dans le cas présent, la finitude du cristal est en soi une imperfection : la réflexion de l'onde n'est que partielle\* et une petite partie du signal incident traverse le milieu, sous la forme d'ondes évanescentes.

L'amplitude transmise  $A_t$  est alors exponentiellement décroissante en fonction de l'épaisseur  $L$  du milieu à bande interdite :  $A_t = A_i \exp(-\kappa L)$ . Nous avons pu vérifier cette décroissance exponentielle de la transmission au cours de la construction d'un échantillon de 10 rangées de 100 tiges, en mesurant la transmission à une fréquence de la bande interdite dans la direction  $\Gamma X$  pour chaque nouvelle rangée de tiges ajoutée (figure 2.4). Cette expérience nous a en outre permis de mesurer l'évolution fréquentielle du coefficient d'atténuation  $\kappa$ , qui nous sera utile par la suite (figure 2.5).

## 2.3 Analyse de la phase

Les transducteurs ultrasonores sont sensibles au champ de pression à tout instant, ce qui signifie que la phase du signal électrique mesuré en sortie de la chaîne d'acquisition est identique à celle du champ de pression au point de mesure. Cette information est essentielle pour tracer la relation de dispersion du cristal puisque la phase cumulée lors de la propagation à travers l'échantillon est liée à la projection du vecteur d'onde dans la direction de mesure.

### 2.3.1 Dispositif

L'information portant sur la phase est obtenue expérimentalement en analysant les signaux transmis dans le domaine de Fourier. On extrait alors la phase de propagation totale en fonction de la fréquence en résolvant les sauts de  $2\pi$  depuis les plus basses fréquences. La variation de phase spécifique à l'échantillon périodique s'obtient ensuite en retranchant la phase correspondant à la propagation dans l'eau.

---

\*on pourrait dire que cette réflexion est frustrée, par analogie avec l'expérience optique de réflexion totale interne au sein d'un prisme, duquel on approche une seconde interface.

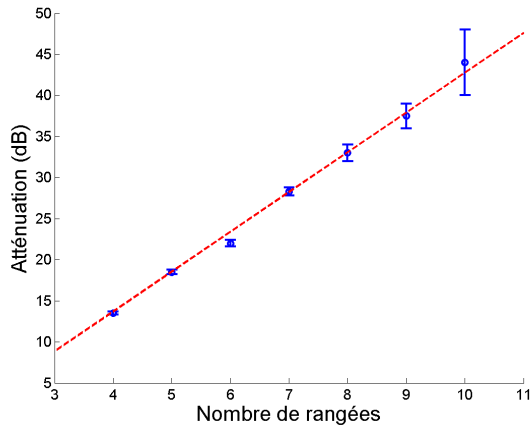


FIG. 2.4 – Atténuation mesurée autour de 480 kHz pour 7 échantillons d'épaisseur croissante : le gap s'approfondit exponentiellement en fonction du nombre de rangées, avec un coefficient d'atténuation moyen de 4,8 dB (+/- 0,2 dB) par rangée supplémentaire.

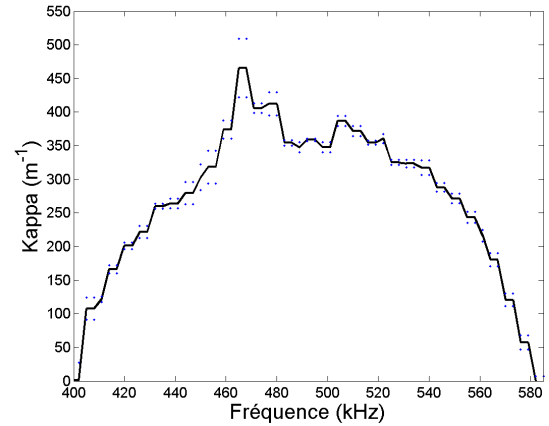


FIG. 2.5 – Etude fréquentielle du coefficient d'atténuation  $\kappa$  de l'onde incidente pour les fréquences de la bande interdite dans la direction  $\Gamma X$ . Les limites de barre d'erreur sont matérialisées par des points bleus.

Soit  $D$  la distance totale entre la source et le récepteur, et  $L$  l'épaisseur de l'échantillon. La phase mesurée  $\Delta\varphi(\omega)$  vaut alors  $k_{ech}L + k_{eau}(D - L)$ . De là, nous tirons la relation  $k_{ech}(\omega)$  et la vitesse de phase dans l'échantillon  $V_\varphi = \omega/k_{ech}(\omega)$ .

### 2.3.2 Résultats

A basse fréquence (c'est-à-dire, en dessous de 300 kHz), la phase croît quasi-linéairement avec la fréquence (figure 2.6) avec une pente proche de celle de l'eau. Dans ces conditions, la longueur d'onde est grande vis à vis de la périodicité du matériau : l'onde incidente ne résout pas les diffuseurs et voit un milieu effectif. Le milieu n'est alors pas ou peu dispersif : vitesse de phase et vitesse de groupe sont égales. C'est dans ce régime de fréquences que certaines études concernant les lentilles acoustiques ont été menées [22].

Dans la bande interdite, la phase présente un comportement en plateau caractéristique des régions dans lesquelles les réflexions de Bragg jouent un rôle prépondérant. La "propagation" à travers le cristal se fait alors essentiellement par le biais d'ondes évanescentes, qui ne transportent pas l'information de phase. Quant à la vitesse de phase (figure 2.7), celle-ci voit sa pente s'inverser dans le gap, ce qui est une signature de la dispersion anormale. Noter également les oscillations de la vitesse de phase en dehors de la bande interdite, dont la présence est liée à la faible épaisseur du cristal.

La rupture de pente caractéristique de la dispersion anormale est très pratique pour définir avec précision la gamme de fréquences de la bande interdite. A cet égard, l'étude de la vitesse de phase dans l'échantillon présentant une face perpendiculaire à la direction  $\Gamma M$  est à même de nous renseigner sur les frontières d'une bande interdite dans cette direction (figure 2.8). De

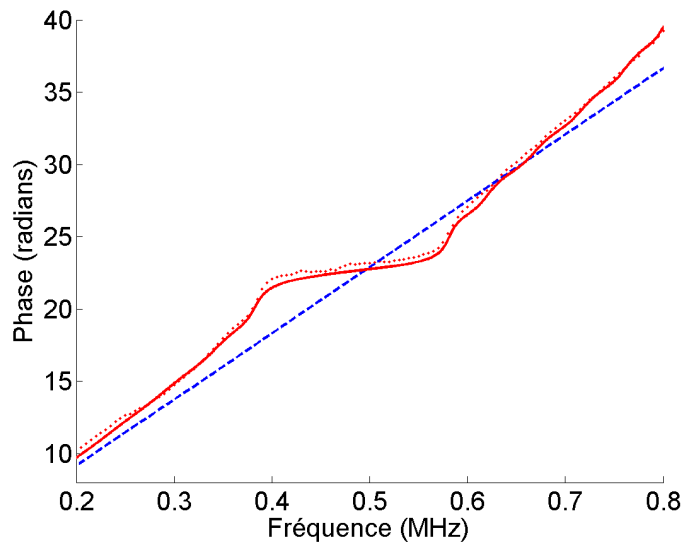


FIG. 2.6 – Phase cumulée lors de la propagation à travers l'échantillon périodique de 8 rangées (points rouges), phase calculée à l'aide d'un modèle unidimensionnel que nous présenterons dans le prochain chapitre (trait rouge), phase cumulée à travers une même épaisseur d'eau (tirets bleus).

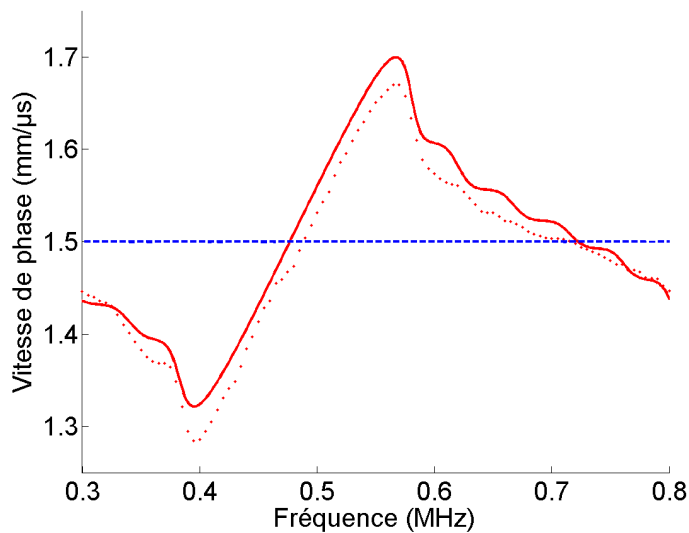


FIG. 2.7 – Vitesse de phase mesurée à travers l'échantillon périodique de 8 rangées dans la direction  $\Gamma X$  (points rouges), vitesse de phase calculée à l'aide du modèle 1D (trait rouge), vitesse de phase dans l'eau (tirets bleus). La région de dispersion anormale s'étend de 395 à 567 kHz.

même, la mesure de la vitesse de phase dans la direction  $\Gamma X$  nous permet d'affiner l'évaluation des frontières de la bande interdite.

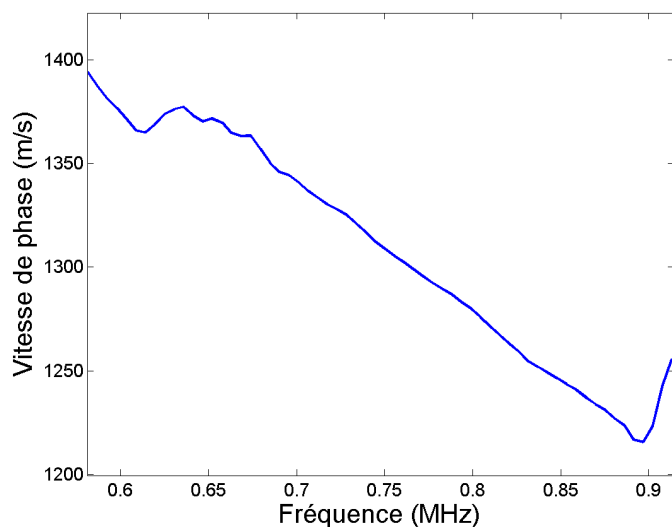


FIG. 2.8 – Vitesse de phase mesurée dans la direction  $\Gamma M$  sur un échantillon de 10 rangées de tiges. On observe deux zones de dispersion anormale dans les gammes de fréquence 614-636 kHz et 897-... kHz.

La phase étant très sensible à la qualité des signaux, il a été difficile d'observer dans de bonnes conditions l'inversion de pente qui se situe en limite de bande passante du transducteur (au-delà de 900 kHz). Il semblerait en effet qu'un *stopband* de faible largeur existe dans la direction  $\Gamma M$  autour de 905 kHz. Dans tous les cas, les gammes de fréquences dans lesquelles nous avons mis en évidence la dispersion anormale dans les directions  $\Gamma X$  et  $\Gamma M$  ne coïncident pas.

Cette analyse approfondie des deux directions cristallographiques de la structure confirme donc l'absence de bande interdite totale dans un cristal constitué de tiges d'acier assemblées en réseau carré de fraction surfacique 22% immergé dans l'eau. Dans le chapitre 3, nous mettrons en évidence le rôle de la fraction surfacique des diffuseurs dans l'apparition d'une bande interdite absolue.

### 2.3.3 Relations de dispersion

Dans l'étude des structures périodiques, la connaissance des relations de dispersion est importante, puisque beaucoup des propriétés intéressantes des cristaux découlent plus ou moins directement de ces relations (*phonon focusing effect* [24], *negative refraction* [36], ...). Grâce aux relations de dispersion, il est en particulier possible de déterminer les fréquences permises pour tout vecteur d'onde incident.

La connaissance de la vitesse de phase dans les deux directions cristallographiques principales nous permet de tracer la relation de dispersion du cristal dans la gamme de fréquences accessibles expérimentalement (figure 2.9). La relation de dispersion (ici tracée en schéma de zone réduite<sup>†</sup> et dans la seule direction  $\Gamma X$ ) présente de fortes analogies avec celles que l'on peut

<sup>†</sup>c'est-à-dire, repliée au sein de la première zone de Brillouin.

observer couramment dans l'étude des semiconducteurs cristallins en bord de zone de Brillouin. La différence réside dans le fait que l'épaisseur du cristal phononique est ici relativement faible en comparaison du nombre de plans d'atomes couramment observés dans le cas électronique (8 contre plusieurs centaines). De fait, la pente de la relation de dispersion dans la bande interdite n'est pas infinie. Une application du modèle 1D, que nous détaillerons dans la section 3.1, consistera à valider cette assertion en augmentant virtuellement le nombre de rangées de tiges dans nos échantillons.

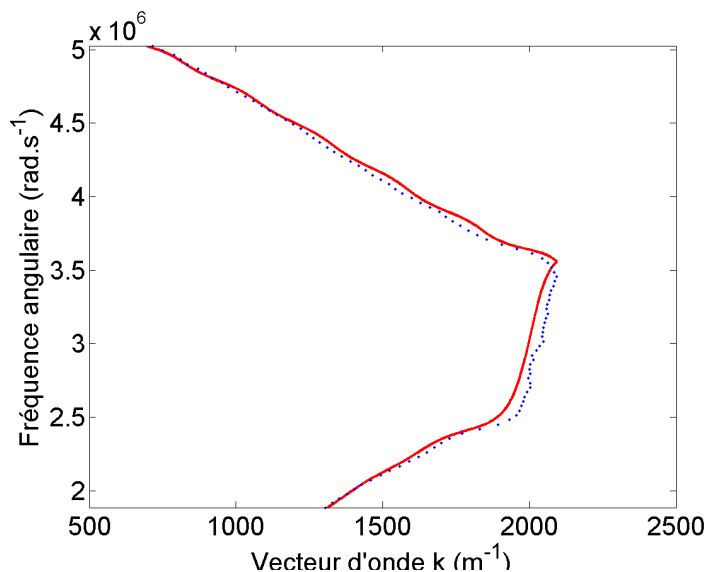


FIG. 2.9 – Relation de dispersion en schéma de zone réduite, mesurée dans la direction  $\Gamma X$  autour de la bande interdite sur un échantillon de 4 rangées de tiges (points expérimentaux en bleu, simulation à l'aide d'un modèle unidimensionnel en trait continu rouge). Le "point de repliement", c'est-à-dire  $X$ , a été fixé en  $k = \pi/a$  où  $a$  est la périodicité du cristal.

## 2.4 Mise en évidence de l'effet tunnel

Nous nous sommes ensuite intéressés à la vitesse de groupe dans les cristaux phononiques. Une idée généralement répandue est que la vitesse de groupe mesure la vitesse de propagation de l'information dans un milieu. Si cela s'avère vrai dans la plupart des situations courantes, les cristaux phononiques (ainsi que d'autres dispositifs, comme les miroirs de Bragg en optique) se posent en exception<sup>‡</sup>. Nous allons en effet montrer comment nous avons mesuré des vitesses de groupe supérieures à celles des constituants du cristal étudié, et en quoi ces mesures ne peuvent briser la causalité de l'expérience. Des expériences similaires sur des cristaux phononiques 3D menées en 2002 par Suxia Yang et l'équipe de John Page ont fait l'objet d'une publication dans PRL [34].

<sup>‡</sup>En optique, il est bien connu que certains matériaux peuvent voir leur vitesse de groupe  $V_g$  augmenter au-delà de la vitesse de la lumière  $c$ , en particulier dans les régions pour lesquelles l'indice optique  $n$  est décroissant en fréquence, (c'est à dire, dans les régions de forte absorption ou atténuation). Par différenciation de la relation  $n = c/V = ck/\omega$ , on montre que  $c/V_g = n + \omega dn/d\omega$ . Ainsi, quand  $dn/d\omega < 0$ , on peut observer  $c/V_g < 1$ .



### 2.4.1 Définition de la vitesse de groupe

La vitesse de groupe peut se calculer classiquement par  $V_g = d\omega/dk_{ech}$  : le résultat obtenu est correct mais s'avère souvent de moins bonne qualité (car plus bruité) qu'une résolution basée sur une interprétation physique de la vitesse de groupe.

La vitesse de groupe est définie pour un paquet d'ondes comme la vitesse de propagation de son enveloppe. Ce paquet d'ondes doit répondre à certaines conditions pour que la définition soit acceptable : il ne doit être ni trop étroit ni trop large en fréquence. En effet, pour un paquet comprenant un grand nombre de fréquences, les effets dispersifs du milieu vont intervenir en déformant le paquet, ce qui ne nous permettra pas de définir correctement son temps d'arrivée<sup>§</sup>. Pour un paquet d'onde de faible largeur fréquentielle, on se rapproche d'une expérience monochromatique, de telle sorte qu'il est là encore difficile de donner un sens au paquet d'ondes (*a fortiori*, à son maximum).

Il faut ensuite définir ce que l'on entend par vitesse de propagation de l'enveloppe d'un paquet d'onde, notamment dans le cas où celui-ci est atténué. Si le paquet n'est pas atténué ni déformé, la question ne se pose pas : la vitesse de l'enveloppe est alors clairement définie, puisque tous ses points subissent une translation dans le temps. Si par contre le paquet est atténué tout en conservant sa forme, nous n'avons d'autre choix que de mesurer le temps d'arrivée du maximum de l'enveloppe<sup>¶</sup>.

### 2.4.2 Dispositif expérimental

L'expérience est en tout point similaire à celle permettant de mesurer la transmission à travers les échantillons. Pour chaque fréquence, un générateur programmable synthétise un paquet gaussien de largeur contrôlée, et la transmission est moyennée sur plusieurs couples de positions émetteur/récepteur. L'expérience est répétée dans l'eau pour acquérir le signal de référence.

Le signal mesuré à travers l'échantillon (figure 2.10) est entaché d'un rebond qui intervient 175  $\mu s$  après le signal principal : il s'agit de la double réflexion du signal sur la face avant du cristal et sur le transducteur source. Cet artefact n'est pas critique ici, puisqu'il ne nous empêche pas de mesurer avec précision le temps d'arrivée du maximum du paquet d'onde principal.

Le maximum du paquet d'onde ayant traversé l'échantillon arrive 5,5  $\mu s$  avant son homologue ayant traversé une épaisseur d'eau comparable. De plus, le maximum du paquet d'onde apparaît de l'autre côté de l'échantillon seulement 2  $\mu s$  après y être entré, ce qui correspond à une vitesse de groupe de 5,7 mm/ $\mu s$  (soit la vitesse longitudinale du son dans l'acier pur).

Pour obtenir le temps de groupe en fonction de la fréquence, nous avons procédé par filtrage gaussien du signal transmis en réponse à une courte excitation. Par linéarité de la propagation, cette procédure est équivalente à l'expérience décrite précédemment et beaucoup plus rapide. Nous avons ainsi pu définir un temps de groupe pour la traversée des échantillons périodiques

<sup>§</sup>Cela exclut en particulier la possibilité de déterminer le temps de traversée du cristal en l'insonifiant avec une impulsion brève de type dirac.

<sup>¶</sup>Il existe en fait une mesure alternative qui consiste à déterminer le temps d'arrivée du centre de masse du paquet gaussien [37]. Ces deux techniques donnent des résultats identiques quand la dispersion de la vitesse de groupe est faible, ce qui est le cas au sein du gap [38].

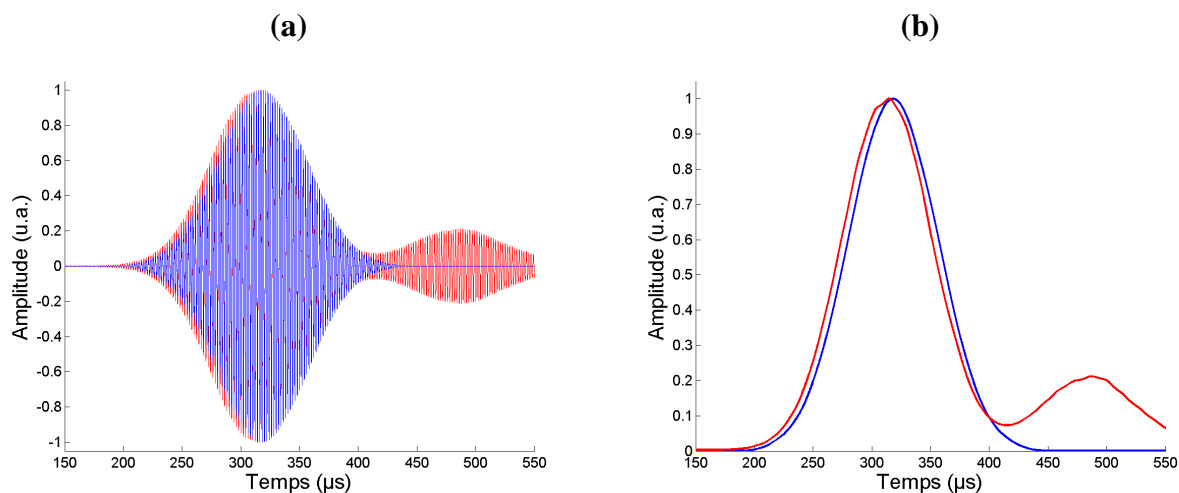


FIG. 2.10 – (a) : Paquets d'onde gaussiens (normalisés à 1) mesurés en transmission à travers un échantillon périodique de 8 rangées (rouge) et dans l'eau (bleu) - (b) : Leurs enveloppes normalisées. Dans le domaine fréquentiel, les spectres sont centrés sur 500 kHz et leur largeur à mi-hauteur est de 10 kHz. Le paquet d'onde ayant traversé l'échantillon est ici représenté agrandi d'un facteur 86.

en mesurant le temps d'arrivée du maximum du paquet pour chaque fréquence de la bande passante. Connaissant l'épaisseur de l'échantillon, nous en déduisons alors la vitesse de groupe (figure 2.11). Nous avons comparé cette méthode à la technique consistant à dériver le vecteur d'onde par rapport à la fréquence angulaire, ce qui nous a permis de définir une largeur optimale de paquet d'onde<sup>||</sup>.

Dans la bande interdite, le temps de groupe est très faible (inférieur à  $7,5 \mu s$ , le temps de traversée d'une épaisseur d'eau équivalente à celle de l'échantillon), ce qui implique une vitesse de groupe importante. Il a été démontré par S. Yang [34] que le temps de groupe à la traversée de cristaux phononiques d'épaisseur croissante est indépendant de cette épaisseur, ce qui autorise des vitesses de groupe bien supérieures à celles constatées indépendamment dans chacun des constituants du cristal<sup>\*\*</sup>. En cela, l'analogie avec l'effet Hartman [39] en mécanique quantique est forte<sup>††</sup> et justifie l'hypothèse de transport du pulse ultrasonore dans la bande interdite par un mécanisme analogue à celui de l'effet tunnel.

Il est également intéressant de noter que le temps de groupe devient très important aux fréquences correspondant aux bords de la bande interdite. De fait, la vitesse de groupe tend à s'annuler en ces fréquences, comme si l'onde était piégée dans la structure. Dans l'étude des

<sup>||</sup>La largeur à mi-hauteur optimale du filtrage gaussien vaut 3 kHz, et permet de régulariser quelque peu les fluctuations de la mesure dans la bande interdite

<sup>\*\*</sup>Nous aurons l'occasion de le vérifier à l'aide du modèle unidimensionnel dans le chapitre suivant

<sup>††</sup>L'effet Hartman se manifeste dans une barrière de potentiel, et se traduit par un temps de traversée de l'échantillon indépendant de son épaisseur.

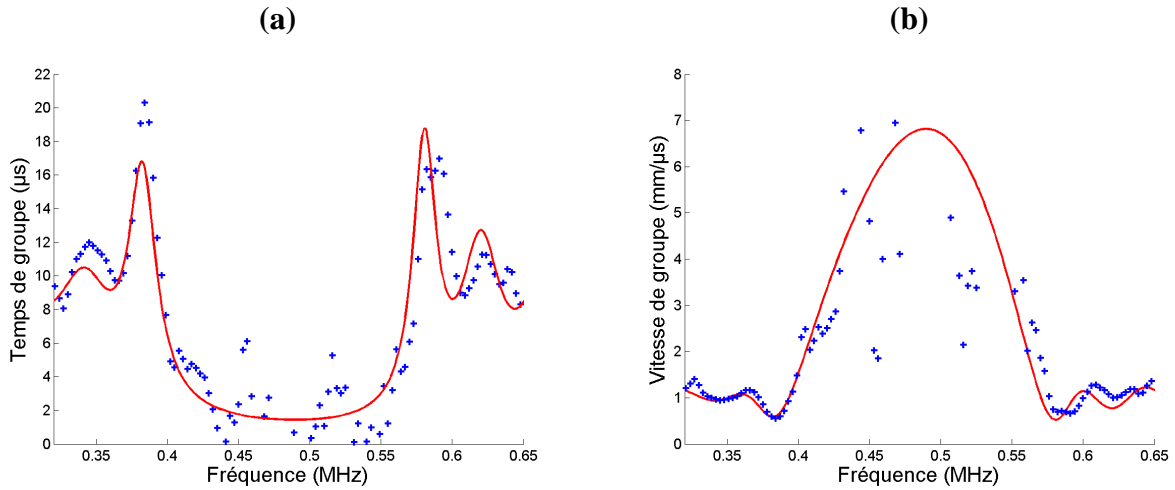


FIG. 2.11 – Temps de groupe (a) et vitesse de groupe (b) mesurés à travers un échantillon de 8 rangées de tiges (points bleus), calculés avec le modèle 1D (trait rouge). Les résultats sont fortement bruités dans le gap : cela est à imputer à la difficulté de définir avec précision la position du maximum de l'impulsion gaussienne quand l'amplitude transmise est faible.

cristaux photoniques et autres structures quasi-périodiques, il a d'ailleurs été proposé d'utiliser ce phénomène pour identifier les frontières des bandes interdites [40, 41].

### 2.4.3 Causalité

En acoustique, il n'y a pas réellement de raison de se soucier de la préservation de la causalité *stricto sensu*, puisque le temps de groupe mesuré à la traversée d'un paquet d'onde dans un cristal phononique d'épaisseur quelconque est toujours positif. De plus, il n'y a pas de vitesse du son théoriquement infranchissable, telle que la vitesse de la lumière en optique. S'il est besoin de se rassurer quant à la vitesse de propagation de l'énergie (ou même de l'information), il faut constater sur la figure 2.10 qu'un paquet gaussien ayant traversé l'échantillon périodique est d'amplitude largement atténuée par rapport à un paquet d'onde témoin ayant traversé une épaisseur similaire d'eau. En superposant ces paquets d'ondes à échelle comparable (par exemple, sur la figure 2.13), on s'aperçoit que l'amplitude du signal transmis est à tout temps inférieure à celle du signal de référence. L'énergie ne voyage donc pas plus vite dans un cas que dans l'autre, même si le maximum d'un paquet d'onde arrive avant l'autre.

Pour autant, il reste à comprendre les phénomènes physiques qui gouvernent cette apparente propagation à vitesse de groupe importante, et c'est la raison de la petite étude bibliographique qui suit.

#### pulse reshaping

Il existe une première explication physique à ce phénomène d'avancement de paquet d'onde, que l'on trouve couramment évoquée : l'atténuation étant le résultat de l'interférence entre les ondes incidentes et les ondes réfléchies au sein de la structure du cristal, il est nécessaire qu'un

système d'ondes stationnaires s'établit dans le cristal. Or, le système d'ondes stationnaires ne peut être "alimenté" que par l'onde incidente. Il en résulte que les premiers instants du paquet d'onde ne peuvent être aussi efficacement atténués que les suivants, puisque les ondes stationnaires n'ont pas encore eu le temps de s'installer (voir la figure 2.12).

Ce phénomène, dit de "*pulse reshaping*", a été initialement évoqué dans le domaine de l'optique par Steinberg et Japha pour expliquer l'apparente propagation supraluminique d'un photon dans un cristal photonique, et pour justifier du raccourcissement temporel de paquets d'ondes ayant traversé des milieux périodiques [42, 43].

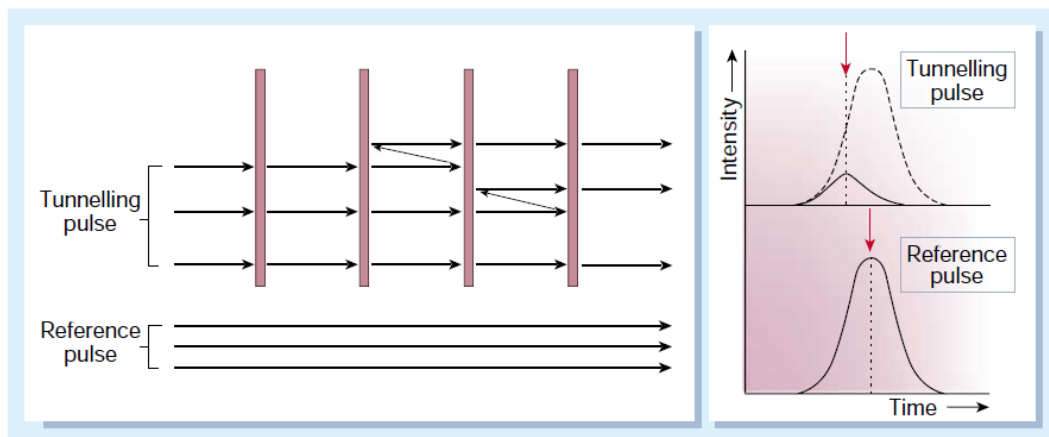


FIG. 2.12 – Représentation graphique du phénomène de *pulse reshaping* : les premiers instants du pulse franchissent la barrière phononique sans encombre tandis que le restant du paquet d'onde est fortement atténué. D'après [44].

Peut-on réellement parler de *pulse reshaping* pour notre expérience ?

Deux arguments nous poussent à croire que cette explication n'est pas la bonne, même si elle est couramment évoquée pour expliquer des situations similaires [37, 45].

Il semblerait tout d'abord que ce mécanisme ne soit pas en mesure d'expliquer l'avancement temporel du maximum d'un paquet d'ondes temporellement large (mais la controverse est ouverte à ce sujet [46]). En effet, le temps d'établissement du système d'ondes stationnaires est *a priori* court, ce qui restreint l'usage de cet argument aux paquets gaussiens large bande. Nous confirmons cette restriction en représentant le rapport des enveloppes des pulses transmis dans le cristal et dans une épaisseur comparable d'eau au cours du temps (figure 2.13). Ce rapport est décroissant de manière monotone autour de la position du maximum du paquet gaussien transmis à travers l'échantillon (soit  $314 \mu\text{s}$ ), ce qui interdit toute possibilité de renforcement du mécanisme d'atténuation à ce temps<sup>‡‡</sup>.

Enfin, notre expérience n'est pas en accord avec l'hypothèse de *pulse reshaping*, puisque la largeur à mi-hauteur du pulse gaussien est ici conservée (voir la figure 2.10). Une signature avérée du phénomène de *pulse reshaping* consiste en effet en un raccourcissement du pulse

<sup>‡‡</sup>Sur ce graphe, on observe par contre une rupture de pente vers  $220 \mu\text{s}$  qui peut tout à faire correspondre à une transition entre un régime d'établissement d'ondes stationnaires et un régime permanent

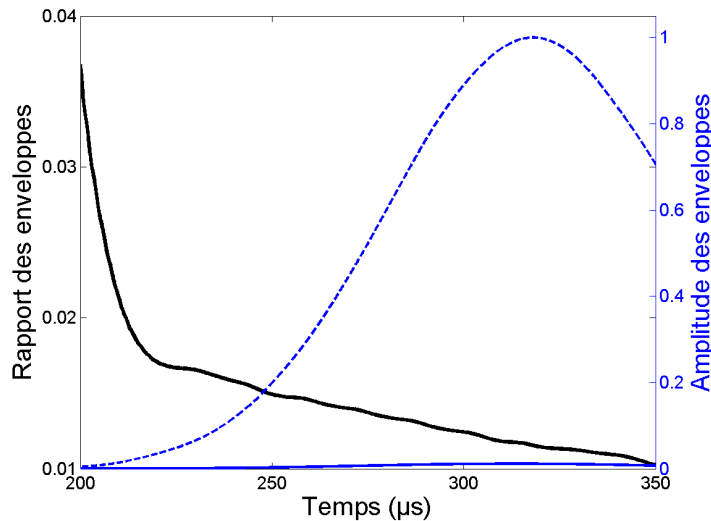


FIG. 2.13 – Evolution temporelle du rapport d'amplitude des enveloppes gaussiennes (pulse transmis / pulse de référence) en trait continu noir. Nous représentons sur le même graphe les enveloppes des pulses transmis dans l'eau (trait bleu hachuré) et dans un échantillon de 8 rangées de tiges (trait bleu continu) à la même échelle.

gaussien (du fait du mécanisme de *front loading*) [47]. Il nous faut donc chercher une autre explication.

### Régime quasi-statique

Les paquets d'ondes utilisés pour évaluer le temps de groupe ont une largeur fréquentielle de l'ordre de la dizaine de kilohertz, ce qui correspond à une dimension temporelle caractéristique de  $100 \mu\text{s}$ . L'extension spatiale d'un tel paquet d'onde dans l'eau (15 cm) est très supérieure à celle de l'échantillon ( $\approx 1 \text{ cm}$ ). Après un court régime transitoire, le cristal phononique réagit donc comme s'il était insonifié par une onde monochromatique modulée en amplitude avec une période très grande. Il se trouve donc en régime quasi-statique, comme le souligne Winful [46, 48]. Dans ces conditions, le pulse gaussien ne se propage pas réellement à travers la barrière : son rôle consiste à moduler l'énergie stockée dans la barrière depuis le début de l'illumination sous forme d'ondes stationnaires.

Ce point de vue permet entre autres d'expliquer la saturation du temps de groupe pour des échantillons d'épaisseur croissante (*ie* l'effet Hartman). En effet, Winful démontre dans un premier temps que l'énergie stockée sous forme d'ondes stationnaires (*stored reactive power*) est proportionnelle au temps de groupe (ou *phase time*) que l'on mesure classiquement [49]. Ensuite, il prouve que cette énergie devient indépendante de la largeur de la barrière, puisqu'elle se concentre presque essentiellement dans une région initiale du cristal (ou longueur caractéristique de pénétration) [48]. Quelle que soit la taille du cristal, la quantité totale d'énergie que celui-ci est capable d'emmagasiner ne varie donc pas significativement, ce qui explique la saturation du temps de groupe. L'interprétation du temps de groupe (mesuré comme le temps d'apparition du maximum du paquet gaussien en sortie du cristal par rapport au moment où un maximum est entré) est celle d'un temps de relaxation de la structure qui accumule de l'énergie et la restitue de manière retardée à la manière d'un condensateur. Il semblerait donc que le "paradoxe" de l'effet Hartman s'arrête ici !

### Dispersion anormale

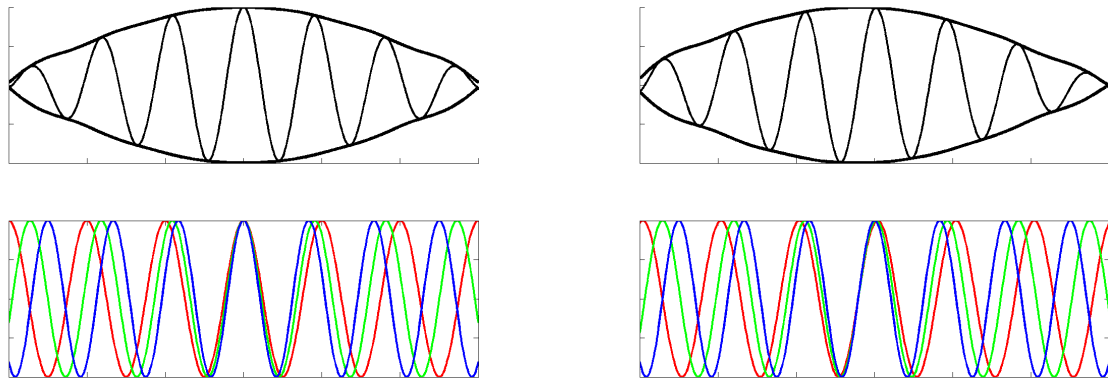


FIG. 2.14 – Un paquet d'onde (en haut, à gauche) composé de trois fréquences pures (en bas, à gauche) passe à travers un dispositif qui retarde plus les **basses fréquences** que les **hautes**. Le paquet d'onde mesuré en sortie du dispositif (en haut, à droite) semble avancé temporellement.

On trouve parfois une explication duale à cette "propagation supraluminique" dans les régions d'ondes évanescentes. Un paquet d'ondes se bâtit par l'interférence constructive des ondes monochromatiques qui le composent. Or, la dispersion anormale caractéristique de ces régions modifie la condition d'interférences en retardant significativement les plus grandes longueurs d'ondes. Un paquet d'ondes traversant une zone de dispersion anormale semblera donc avancé temporellement par rapport à un paquet ayant traversé un milieu homogène de référence (voir la figure 2.14).

Cette explication est moins microscopique que l'hypothèse de Winful : l'une et l'autre ne s'opposent absolument pas. La dispersion anormale ne constitue d'ailleurs probablement pas une explication, mais une conséquence des phénomènes d'interférences, et donc du comportement d'un paquet gaussien dans un cristal phononique.

Enfin, il faut noter que l'on calcule bien souvent la vitesse de groupe à partir d'un temps de groupe et de l'épaisseur physique de l'échantillon. Or, le passage de la mesure d'un temps de groupe à celle d'une vitesse de groupe suppose qu'il y ait propagation et que la distance parcourue soit connue. Dans les dispositifs à ondes évanescentes, la notion même de propagation est fortement compromise à partir du moment où nous cherchons à mettre en évidence l'effet tunnel, puisque ce sont des ondes stationnaires qui assurent le transfert d'énergie de part et d'autre du cristal. Il est donc quelque peu fallacieux de tracer une vitesse de groupe à partir d'un temps de groupe résultant d'une définition qui ne prend pas en compte la nature de la propagation.

Pour conclure ce premier chapitre expérimental, il faut mentionner que les cristaux phononiques construits au laboratoire nous permettent de saisir les enjeux des récents débats concernant par exemple la "propagation" dans les régions d'ondes évanescentes [44, 46, 48]. Quand

bien même, nous ne disposons pas de la dualité onde-corpuscule, ni de la réduction du paquet d'onde de la mécanique quantique ; de même que nous n'avons pas de vitesse théoriquement "infranchissable" telle que la vitesse de la lumière. Cela ne nous permet pas de pousser l'analogie jusqu'aux expériences d'optique dans lesquelles deux photons uniques sont émis conjointement et suivent chacun une voie distincte –l'une étant par exemple constituée d'un cristal photonique– pour finalement interférer ensemble [42]. Des phénomènes facilement compréhensibles pour des paquets d'ondes deviennent alors plus ardues à concevoir une fois interprétés en termes de particules uniques.

# Chapitre 3

## Modélisation d'un monocristal

Etant donné la complexité du régime de diffusion multiple, y compris dans des milieux ordonnés, il serait illusoire de chercher une expression analytique de l'amplitude transmise, sauf à traiter le cas unidimensionnel.

La modélisation numérique est donc indispensable ; c'est pourquoi nous nous efforçons dans ce chapitre de présenter les différentes méthodes que nous avons implémentées, en insistant sur leurs avantages et leurs limites.

### 3.1 Modèle acoustique unidimensionnel

Pour mieux comprendre un phénomène physique, il est parfois nécessaire de le réduire à sa plus simple expression. Dans le cas présent, nous avons utilisé un modèle *a priori* réducteur, puisque nous avons modélisé nos échantillons de tiges, qui ont un caractère bidimensionnel, par une succession de plans constitués du même matériau que les tiges. La géométrie du problème est ainsi ramenée à une dimension, ce qui autorise des calculs rapides sur la base de l'impédance des matériaux mis en jeu.

De fait, cette modélisation néglige tous les phénomènes de diffusion internes aux rangées de tiges, et ne prend en compte que les réflexions entre les plans de tiges. Les ondes incidentes étant supposées planes et les vecteurs d'ondes perpendiculaires aux couches, seuls les modes longitudinaux seront excités dans les plaques d'acier.

En dépit de ces limitations inhérentes à la simplicité du modèle, l'efficacité pour décrire les résultats expérimentaux est bonne, comme nous avons déjà pu nous en rendre compte sur les figures 2.6 à 2.11.

Ce modèle étant un classique de la propagation dans les milieux stratifiés, nous ne présenterons pas le détail des calculs qui peut se trouver dans une monographie [50] et dans la thèse de Suxia Yang [38]. Nous rappellerons cependant les principaux résultats.

Soit une onde plane incidente de la forme  $A_n \exp(ik_n z + i\omega t)$  (voir la figure 3.1). Du fait des réflexions aux interfaces, le déplacement dans la couche indiquée par  $j$  s'écrit comme la somme de deux ondes planes contrapropagatives :  $A_j \exp(ik_j z + i\omega t) + B_j \exp(-ik_j z + i\omega t)$ . Calculer les



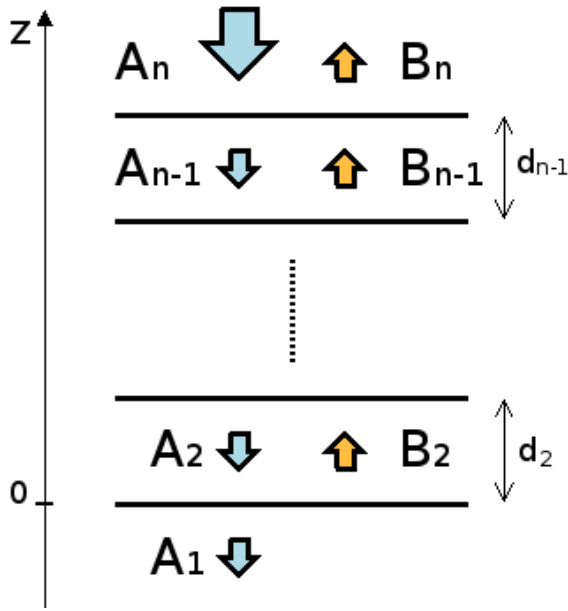


FIG. 3.1 – Schéma de principe du modèle 1D : les coefficients  $A_j$  sont les amplitudes complexes des ondes planes se propageant dans le sens de l'onde incidente ( $A_n$ ) tandis que les coefficients  $B_j$  sont reliés aux ondes planes contra-propagatives. L'épaisseur de la couche  $j$  est  $d_j$ .

coefficients de réflexion et de transmission équivalents de la structure multicouche revient donc à exprimer les rapports  $B_n/A_n$  et  $A_1/A_n$ .

En utilisant le principe des impédances équivalentes (ou impédance d'entrée  $Z_j^{in}$ ), on démontre que le coefficient de réflexion généralisé d'une couche à l'autre vaut :

$$\frac{B_{j+1}}{A_{j+1}} = \frac{Z_{j+1} - Z_j^{in}}{Z_{j+1} + Z_j^{in}} \quad \text{pour } j \in [1 \dots n - 1] \quad (3.1)$$

Cette expression fait appel à l'impédance  $Z_{j+1}$  de la couche  $j+1$ , ainsi qu'à l'impédance d'entrée  $Z_j^{in}$  de la couche  $j$ , qui s'exprime de manière récursive en fonction des impédances d'entrée des couches de rang inférieur :

$$Z_j^{in} = Z_j \left( \frac{Z_{j-1}^{in} - iZ_j \tan \phi_j}{Z_j - iZ_{j-1}^{in} \tan \phi_j} \right) \quad (3.2)$$

Dans cette équation,  $\phi_j$  est la phase introduite par la propagation dans la couche  $j$ , soit  $k_j d_j$ .

De la même manière, on écrit le coefficient de transmission généralisé d'une couche à l'autre :

$$\frac{A_j}{A_{j+1}} = \frac{Z_{j+1}}{Z_j} \frac{Z_j + Z_j^{in}}{Z_{j+1} + Z_j^{in}} \exp(i\phi_j) \quad \text{pour } j \in [1 \dots n - 1] \quad (3.3)$$

Le coefficient de transmission équivalent à l'ensemble de la structure  $T_n$  se calcule donc facilement à l'aide de 3.3 :

$$T_n = \frac{A_1}{A_n} = \prod_{j=1}^{n-1} \frac{A_j}{A_{j+1}} = \frac{Z_n}{Z_1} \prod_{j=1}^{n-1} \left( \frac{Z_j + Z_j^{in}}{Z_{j+1} + Z_j^{in}} \exp(i\phi_j) \right) \quad (3.4)$$

Cette forme convient particulièrement bien à la mise en oeuvre numérique du calcul, et s'avère

également pratique si l'on souhaite inclure les effets de l'absorption. Il suffit alors d'ajouter une partie complexe aux vecteurs d'onde  $k_j$ , auquel cas la tangente apparaissant dans la formule 3.2 doit être comprise comme la généralisation de la fonction tangente aux variables complexes.

Pour calculer la transmission d'un cristal de  $N$  rangées de tiges, nous utilisons ce modèle avec  $N$  plans d'acier, d'épaisseur individuelle ajustée à  $75\text{ }\mu\text{m}$ , séparés par des couches d'eau\*. L'épaisseur des couches d'eau est choisie de telle sorte que la périodicité de la structure reproduise celle des cristaux que nous avons étudiés expérimentalement.

Lesdits cristaux ont été construits à l'aide d'une fraiseuse automatique en programmant un pas de déplacement de  $1,5\text{ mm}$  pour le perçage du logement de chaque tige. Pour autant, cela ne nous assure pas une périodicité parfaitement égale à  $1,5\text{ mm}$ , de telle sorte qu'il a fallu modifier ce paramètre du modèle vers une valeur légèrement inférieure ( $1.435\text{ mm}$ ) pour que la transmission calculée ajuste au mieux les mesures expérimentales (figure 3.2).

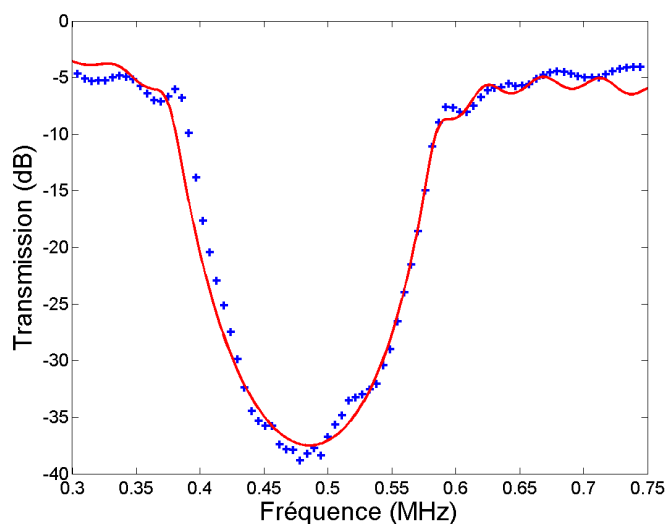


FIG. 3.2 – Atténuation mesurée en transmission sur un échantillon de 8 rangées, dans la direction  $\Gamma X$  (points expérimentaux en bleu, modèle 1D en rouge, avec une absorption de  $0,010\text{ mm}^{-1}$ ).

Une première application de ce modèle unidimensionnel est la mise en évidence de l'effet Hartman (que nous avons observé sur nos cristaux 2D – section 2.4) pour des cristaux phononiques unidimensionnels. Nous pouvons en effet constater sur la figure 3.3 que le temps de groupe mesuré au minimum de la transmission sature pour des épaisseurs importantes du cristal. De fait, la transmission de paquets d'ondes de fréquences comprises dans la bande interdite se fait essentiellement à temps de groupe constant, alors que la propagation en milieu homogène se réalise classiquement à vitesse constante. Cela explique les vitesses de groupe observées, qui peuvent se révéler supérieures aux vitesses des constituants du matériau pour des épaisseurs importantes de cristal.

Ce premier modèle permet également de faire varier facilement le nombre de couches des cristaux et d'étudier le comportement de la relation de dispersion au voisinage du point X dans

\* Cette épaisseur peut sembler faible en regard du diamètre des tiges ( $0,8\text{ mm}$ ). Il s'agit pourtant de l'unique valeur permettant de reproduire les résultats expérimentaux de manière satisfaisante.

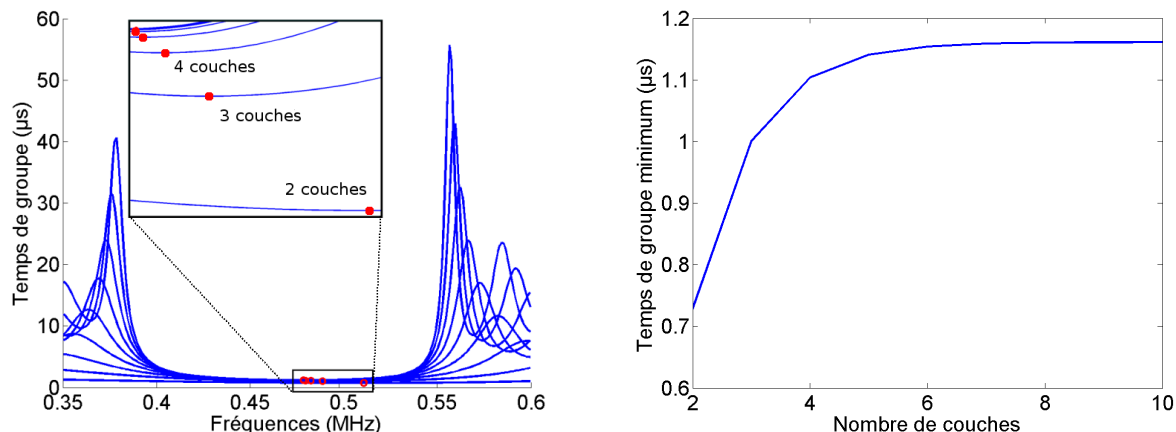


FIG. 3.3 – A gauche, temps de groupe fonction de la fréquence à travers des cristaux phononiques 1D d'épaisseur croissante (2 à 10 couches). Les points rouges marquent le temps de groupe minimum pour chaque épaisseur. A droite, évolution du temps de groupe minimum en fonction de l'épaisseur du cristal

l'espace réciproque (figure 3.4). On peut alors constater le raidissement de la pente de la relation de dispersion pour les fréquences de la bande interdite quand le nombre de couches augmente, ce qui traduit l'approfondissement de la bande interdite.

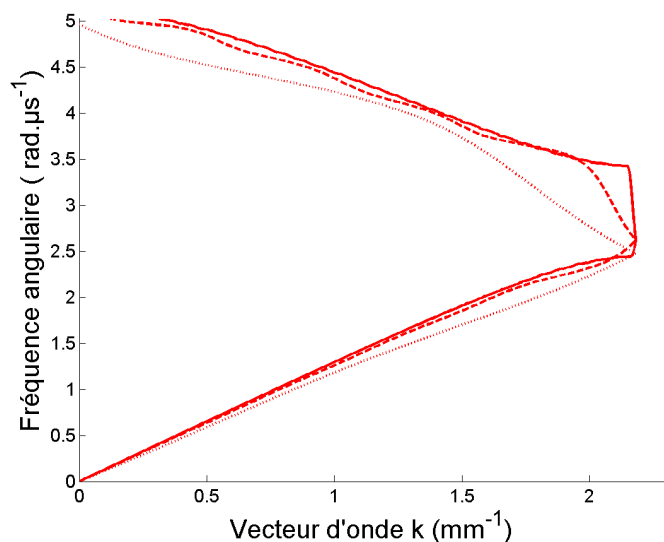


FIG. 3.4 – Relations de dispersion calculées à l'aide du modèle 1D pour des échantillons de 2, 5 et 30 rangées (*resp.* pointillés, tirets et trait continu). Le point X a pour vecteur d'onde  $2,2 \text{ mm}^{-1}$

Cette simulation décrit avec une bonne précision les propriétés en transmission de nos cristaux pour une gamme de fréquences incluant la première bande interdite dans la direction  $\Gamma X$ , c'est à dire entre 0 et 700 kHz (figure 3.2). Au-delà, les approximations que présupposent le modèle ne tiennent plus, en particulier l'hypothèse de diffusions limitées à celles existant entre les plans. L'application du modèle 1D à plus haute fréquence conduit à des bandes de fréquences

interdites de plus en plus larges et profondes, que nous ne retrouvons pas expérimentalement. C'est ainsi que nous comprenons l'importance des processus de diffusion entre tiges voisines et la nécessité de recourir à un modèle plus élaboré.

## 3.2 Développement en ondes planes

Introduite en acoustique par Economou en 1993 [15], la méthode du développement en ondes planes (ou PWE pour *Plane Wave Expansion*) permet de calculer rapidement les relations de dispersion de cristaux phononiques parfaits. A l'origine, cette méthode vient du monde de la physique des solides, puisque inspirée de la *Augmented Plane Wave Method* (APW), qui a rencontré un grand succès pour les calculs de structures de bandes [51].

Son principe repose sur la décomposition en séries de Fourier des coefficients élastiques du milieu hétérogène, combinée à l'utilisation du théorème de Floquet-Bloch.

L'étude classique commence par l'écriture de l'équation de propagation dans les solides hétérogènes :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \lambda \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \right) + \frac{\partial}{\partial x_l} \left( \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \right) \right) + \rho \omega^2 u_i = 0 \quad (3.5)$$

dans laquelle  $\lambda$  et  $\mu$  sont les modules de compression et de cisaillement du matériau,  $u_i$  et  $x_i$  représentent respectivement le déplacement et la variable associés à la direction  $i$  de l'espace.

Quand le matériau composite solide présente une symétrie de translation suivant l'axe Z, Kushwaha démontre l'existence de trois solutions, dont deux sont couplées et présentent une polarisation mixte dans le plan XY. La troisième solution est polarisée selon l'axe Z [52]. Cette analyse mène alors à la résolution de deux systèmes distincts.

Si l'on cherche à calculer les relations de dispersion d'un cristal composé de diffuseurs solides dans une matrice liquide à partir de cette équation, il apparaît des divergences et les solutions obtenues n'ont pas de sens physique [53]. Cela nous contraint à réaliser une approximation, qui simplifie la modélisation, mais qui nuit à la précision des résultats. La solution retenue consiste, en première approximation, à négliger les ondes transverses dans les diffuseurs solides. La rigidité d'inclusions métalliques est en effet importante par rapport au milieu de propagation ( $Z_{acier} = 31 \times Z_{eau}$ , implique un coefficient de réflexion de 97%), ce qui nous autorise à ne pas prendre en compte les conversions de modes en bord de tige. En posant  $\mu = 0$  et en utilisant la relation  $p = -\lambda \nabla \cdot \mathbf{u}$ , l'équation d'onde 3.5 se réduit alors à

$$\nabla \cdot \left( \frac{\nabla p}{\rho} \right) + \frac{\omega^2}{\lambda} p = 0 \quad (3.6)$$

Dans un cristal phononique infiniment étendu, les fonctions  $\rho(\mathbf{r})$  et  $c(\mathbf{r})$  sont invariantes par translation d'un vecteur du réseau direct. Par conséquent, nous pouvons décomposer en série de

Fourier les fonctions  $1/\rho$  et  $1/\lambda = 1/\rho c^2$  sur les vecteurs  $\mathbf{G}$  du réseau réciproque<sup>†</sup> :

$$1/\rho = \sum_{\mathbf{G}} \sigma(\mathbf{G}) \exp(i\mathbf{G} \cdot \mathbf{r}) \quad (3.7)$$

$$1/\lambda = \sum_{\mathbf{G}} \eta(\mathbf{G}) \exp(i\mathbf{G} \cdot \mathbf{r}) \quad (3.8)$$

Ensuite, du fait de l'analogie entre l'équation de propagation 3.6 et l'équation de Schrödinger [53], il est possible d'appliquer ici le théorème de Floquet-Bloch. Les solutions de l'équation de propagation dans un cristal phononique infini prennent donc la forme d'ondes planes (de vecteur de Bloch  $\mathbf{K}$ ), modulées en amplitude par une fonction  $\varphi(\mathbf{r})$  respectant la périodicité du cristal. Cette fonction peut elle aussi s'écrire comme série de Fourier sur les vecteurs  $\mathbf{G}$  du réseau réciproque :

$$p(\mathbf{r}) = \varphi(\mathbf{r}) \exp(i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r} - i\omega t) = \exp(i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r} - i\omega t) \sum_{\mathbf{G}} \phi_{\mathbf{K}}(\mathbf{G}) \exp(i\mathbf{G} \cdot \mathbf{r}) \quad (3.9)$$

En substituant les expressions 3.7, 3.8 et 3.9 dans 3.6, on arrive à la relation suivante :

$$\sum_{\mathbf{G}'} \sigma(\mathbf{G} - \mathbf{G}')(\mathbf{K} + \mathbf{G})(\mathbf{K} + \mathbf{G}')\phi_{\mathbf{K}}(\mathbf{G}') = \omega^2 \sum_{\mathbf{G}'} \eta(\mathbf{G} - \mathbf{G}')\phi_{\mathbf{K}}(\mathbf{G}') \quad (3.10)$$

Le passage de cette relation à une équation matricielle nécessite de tronquer les sommes sur les vecteurs du réseau réciproque, en faisant l'hypothèse que le nombre d'ondes planes prises en compte est suffisant pour assurer la convergence des développements.

En écriture matricielle, l'équation précédente s'écrit alors :

$$M\phi = \omega^2 N\phi \quad (3.11)$$

La relation  $\omega^2(\mathbf{K})$  s'obtient donc en calculant les valeurs propres de la matrice  $N^{-1}M$  pour chaque vecteur de Bloch  $\mathbf{K}$ . Le calcul des matrices  $M$  et  $N$  est présenté en annexe B.

Dans la pratique, on s'assure que les relations de dispersion calculées n'évoluent plus de manière importante pour un nombre d'ondes planes supérieur. Cela mène à la prise en compte d'une centaine d'ondes planes dans notre cas pour une convergence à mieux que 1 pour mille<sup>‡</sup>.

Comme nous pouvons le constater sur la figure 3.5, l'accord est bon entre la PWE et les mesures effectuées dans les directions  $\Gamma X$  et  $\Gamma M$  dans la gamme de fréquences accessibles à l'expérience (de 250 à 900 kHz).

A basse fréquence, on retrouve la limite classique d'homogénéisation, pour laquelle la longueur d'onde est très grande devant la taille des diffuseurs et le pas de la structure. L'onde ne

<sup>†</sup>Par abus de langage, on appelle vecteur du réseau réciproque tout vecteur dont la projection sur les vecteurs de base du réseau réciproque  $\vec{k}_x$  et  $\vec{k}_y$  est un nombre entier.

<sup>‡</sup>Il s'agit ici de l'*erreur relative transverse*, c'est à dire de l'écart entre deux valeurs successives de  $\omega$  pour un nombre croissant d'ondes planes, ici mesuré au point  $\Gamma$  de la deuxième bande. Ce critère de convergence n'étant pas aussi contraignant que celui de l'erreur absolue, il est préférable d'utiliser 400 ondes planes dans le développement pour obtenir des relations de dispersion avec une précision de l'ordre du kiloHertz.

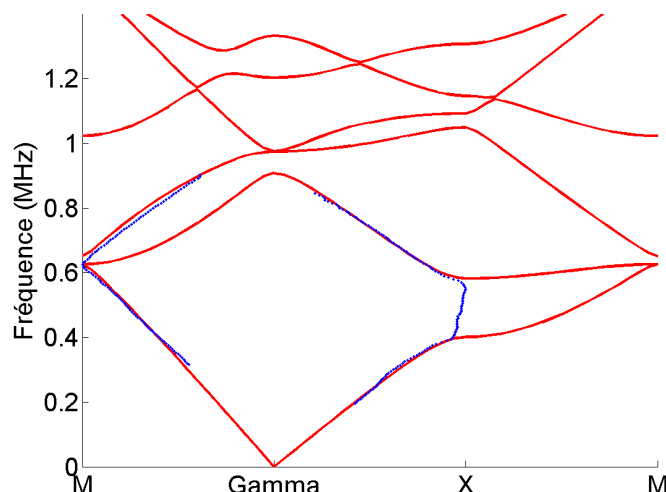


FIG. 3.5 – Relations de dispersion calculées à l'aide de la PWE avec des paramètres correspondant à nos échantillons (en rouge), points expérimentaux en bleu (échantillon composé de 8 rangées de tiges). Noter que le modèle prévoit plusieurs *stopband* dans la direction  $\Gamma X$  ([401-582], [904-974], [1090-1146] kHz), et leur absence totale dans la direction  $\Gamma M$

résout alors pas les diffuseurs et voyage dans un milieu effectif. Ce domaine de fréquences correspond classiquement au domaine d'applicabilité de la loi de Wood [54], qui prend en compte une densité et une compressibilité moyennes d'un milieu diphasique pour calculer la vitesse effective. La loi de Wood donnerait ici des résultats erronés, puisque les inclusions sont rigides, et l'onde n'est alors pas sensible aux paramètres élastiques des diffuseurs. La PWE constitue dès lors une bonne alternative pour réaliser de tels calculs, que le milieu soit ordonné ou non [55]. On peut alors montrer que la vitesse effective du milieu hétérogène est inférieure à celle du milieu hôte (figure 3.7).

Il est intéressant de noter qu'à fréquence croissante, les vecteurs d'onde autorisés dans la direction  $\Gamma M$  sont déterminés par la première bande puis la troisième. La deuxième bande n'est donc pas excitée quand l'insonification du cristal est réalisée selon la direction  $\Gamma M$ . Il s'agit fort probablement d'une "bande sourde", ainsi qualifiée car ses états ne sont pas accessibles pour des raisons de symétrie. Une telle situation a déjà été décrite par Sanchez-Perez *et al.* dans un cristal de cylindres rigides dans l'air [56].

Dans la mesure où nous prenons en compte cette caractéristique de la deuxième bande de fréquence, la méthode de développement en ondes planes confirme la présence du *stopband* de faible largeur que nous avons identifié autour de 625 kHz dans la direction  $\Gamma M$  (figure 2.8). En revanche, la bande interdite partielle que nous avons mise en évidence autour de 905 kHz dans la direction  $\Gamma M$  n'est pas en accord avec la relation de dispersion calculée.

Pour expliquer cet écart, nous proposons plusieurs hypothèses. La première hypothèse supposerait que le faisceau ultrasonore ne soit pas aussi collimaté que nous le croyons, auquel cas, il est possible que sa divergence permette à l'onde d'explorer la direction  $\Gamma X$ , pour laquelle il existe une bande interdite partielle à cette fréquence. Une deuxième hypothèse concerne un éventuel écart à la périodicité du cristal, auquel l'onde serait plus sensible à ces fréquences élevées. Enfin, l'hypothèse la plus plausible est que la relation de dispersion calculée avec l'ap-

proximation  $\mu = 0$  au sein des diffuseurs soit incorrecte à plus haute fréquence. Nous verrons en effet (à la section 3.3.2) que cette approximation modifie notablement le pouvoir diffusant d'une tige. La section efficace d'un diffuseur liquide s'écarte notablement de celle d'un diffuseur solide pour  $kr > 1$ , *i.e.* au-delà de 600 kHz pour nos tiges [53].

La modélisation proposée permet donc de décrire correctement les mesures pour une gamme de fréquences basses, et devient inexacte à plus haute fréquence.

En dépit de cette limitation, cette méthode est intéressante car elle nous permet par exemple de prédire l'apparition d'une bande interdite totale à partir d'une fraction surfacique de tiges de 33%. Pour ce faire, nous utilisons la densité d'états  $D(\nu)$ , dont la valeur à la fréquence  $\nu$  est proportionnelle au nombre de valeurs propres du système 3.11 comprises entre  $\nu$  et  $\nu + d\nu$ , quand l'extrémité du vecteur de Bloch parcourt la surface du triangle irréductible  $\Gamma XM$  dans l'espace réciproque. Une fraction surfacique de 33% correspond à l'utilisation de tiges de rayon égal à 0,49 mm en conservant une périodicité de 1,5 mm. Sur la figure 3.6, nous pouvons en effet constater que la densité d'états d'un cristal de géométrie carrée construit à partir de diffuseurs de 1 mm de diamètre répartis sur un réseau carré de période 1,5 mm s'annule dans une étroite plage de fréquences autour de 612 kHz. Cette plage de fréquences s'agrandit continuellement quand la fraction surfacique de diffuseurs augmente jusqu'à la limite où les frontières des diffuseurs adjacents se rejoignent.

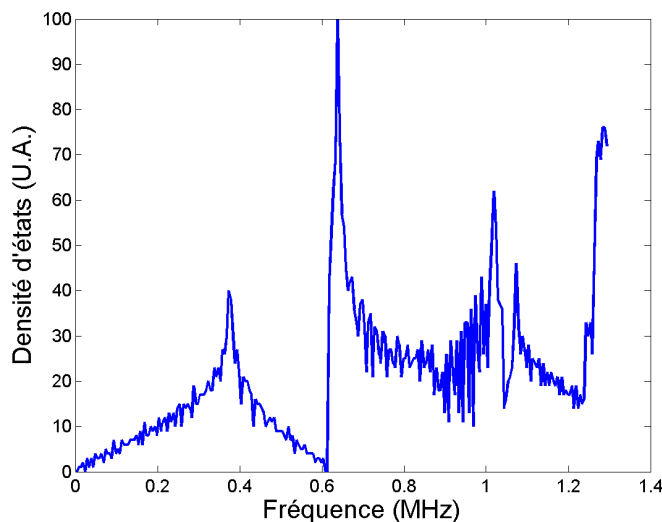


FIG. 3.6 – Densité d'états calculée à partir de la méthode de développement en ondes planes pour un échantillon composé de tiges cylindriques de diamètre 1 mm, réparties sur un réseau carré de pas 1,5 mm. Elle s'annule autour de 612 kHz, signe de l'apparition d'une bande interdite totale.

Historiquement, le domaine d'application de la PWE a longtemps été limité aux matériaux composites de fraction surfacique moyenne et de faible contraste de paramètres élastiques. Dans le cas contraire, la convergence est très lente et requiert un grand nombre d'ondes planes [57]. De fait, la méthode était souvent appliquée aux composites dont les constituants sont de même nature (solide-solide, le plus souvent), alors que les bandes interdites les plus larges étaient prédites pour des contrastes importants de paramètres élastiques.

Ce problème de convergence a reçu plusieurs tentatives d'explications, variables selon les

auteurs, sans que le problème soit exploré plus avant. La principale de ces hypothèses concernait la convergence lente des développements de Fourier des coefficients élastiques. On sait désormais que cela tient à la formulation classique du problème aux valeurs propres, qui n'est pas adéquate pour traiter les discontinuités concomitantes des paramètres élastiques et des déformations [57].

Dans tous les cas, il reste impossible d'utiliser la méthode (en partant de l'équation 3.5) pour simuler un milieu constitué de diffuseurs solides dans un liquide autrement qu'en négligeant les ondes transverses. Ces modes transverses existent en effet dans les diffuseurs, et leur caractère localisé empêche la convergence de la méthode [53].

Enfin, une limitation intrinsèque à la PWE réside dans son incapacité à prendre en compte les effets dus à la taille finie de l'échantillon. Cela est particulièrement apparent dans la région autour de la première bande interdite où l'on constate l'absence d'oscillations de type Fabry-Pérot dans la vitesse de phase calculée à l'aide de la PWE (figure 3.7). De même, la transmission au sein de la bande interdite nous est inaccessible, puisqu'elle est par définition nulle pour un échantillon infiniment étendu. Cela conduit également à une indétermination de la vitesse de phase dans les bandes interdites.

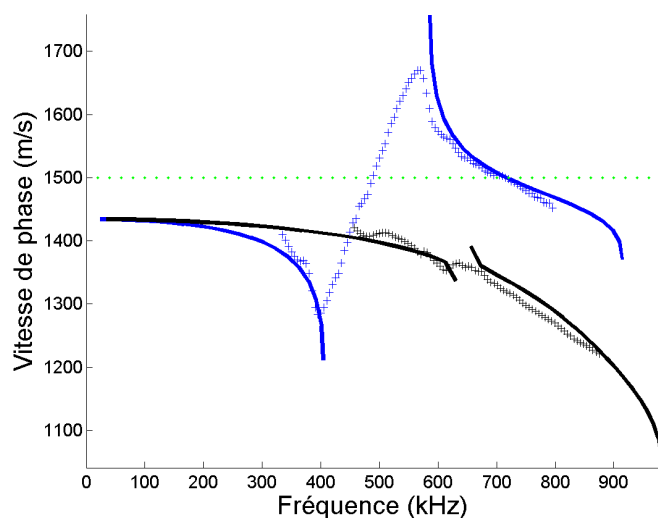


FIG. 3.7 – Vitesse de phase théorique calculée à l'aide de la PWE (trait continu) et mesures expérimentales (croix) dans les deux directions cristallographiques principales ( $\Gamma X$  en bleu,  $\Gamma M$  en noir). La vitesse du milieu hôte est représentée en points verts. A basse fréquence, la vitesse dans le cristal tend vers une valeur uniforme, inférieure à celle de l'eau.

Par rapport au modèle unidimensionnel, nous avons gagné en précision dans la prédiction des *stopband* et dans la connaissance de la relation de dispersion dans la direction  $\Gamma M$ . En revanche, nous avons perdu la taille finie de l'échantillon cristallin. Cela a poussé de nombreuses équipes à développer rapidement d'autres outils de simulation, tels que les différences finies. D'autres méthodes sont également apparues, telles que celles fondées sur la résolution exacte du problème de la diffusion multiple, et c'est à ce genre de méthode que nous nous sommes intéressés par la suite.



### 3.3 Théorie self-consistante de la diffusion multiple

Cette méthode de résolution de l'équation de propagation trouve une fois de plus son origine en physique des solides. Elle est en effet fondée sur une méthode initialement proposée par Korringa, Kohn et Rostoker dans les années 1950 pour calculer la fonction d'onde d'un électron dans un potentiel périodique.

Elle a été adaptée à plusieurs reprises à l'acoustique, que ce soit dans le cadre de géométries bidimensionnelles [58, 59] ou tridimensionnelles [53, 60, 61]

La méthode que nous allons utiliser repose sur un système d'équations self-consistantes, dans lequel la pression que l'on cherche à calculer apparaît à la fois dans le terme de droite et dans le terme de gauche d'une équation matricielle.

Une première relation lie la pression rayonnée par un diffuseur à la pression incidente. Une seconde relation décrit la pression en tout point de l'espace (et en particulier, la pression incidente sur un diffuseur) comme la somme d'une onde non diffusée et des ondes issues de tous les diffuseurs.

La première équation vient de la connaissance que l'on a des diffuseurs utilisés, tandis que la seconde relève des phénomènes de la diffusion multiple.

Il est à noter que ce schéma de résolution self-consistant fournit directement les amplitudes des champs acoustiques en chacun des diffuseurs, et prend en considération tous les ordres de diffusion. Ceci est un avantage certain dans un calcul numérique puisque l'on n'a pas besoin de faire d'hypothèse sur un ordre de diffusion limite.

Nous allons ici détailler un calcul présenté dans un récent article [59], que nous avons implémenté numériquement, et présenterons son application au cas de la diffusion multiple dans un réseau 2D de tiges d'acier dans l'eau.

En milieu homogène, l'équation d'onde régissant la propagation des ondes acoustiques depuis une ligne source s'écrit :

$$(\vec{\nabla}^2 + k^2)G(\vec{r}) = -4\pi\delta^{(2)}(\vec{r}) \quad (3.12)$$

La solution en coordonnées cylindriques s'écrit classiquement  $G(\vec{r}) = i\pi H_0^{(1)}(kr)$ , avec  $H_0^{(1)}$  la fonction de Hankel d'ordre 0 de première espèce.

Les  $N$  diffuseurs cylindriques sont repérés dans le plan  $XY$  par la position  $\vec{r}_i$  de leur centre, relativement à une origine que l'on choisit comme position de la source (la longueur des cylindres est orientée selon la direction  $Z$ ).

L'onde rayonnée en  $\vec{r}$  par un tel diffuseur unique situé en  $\vec{r}_j$  peut s'écrire comme une somme infinie de modes (ou ondes partielles) :

$$p_s(\vec{r}, \vec{r}_j) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i\pi A_n^j H_n^{(1)}(k|\vec{r} - \vec{r}_j|) e^{in\phi_{\vec{r}-\vec{r}_j}} \quad (3.13)$$

En outre, l'onde incidente sur tout diffuseur est la somme de l'onde issue de la source et des

ondes rayonnées par tous les autres diffuseurs. Cela se traduit, pour le diffuseur  $i$ , par la relation :

$$p_{in}^i(\vec{r}) = p_0(\vec{r}) + \sum_{j=1, j \neq i}^N p_s(\vec{r}, \vec{r}_j) \quad (3.14)$$

Dans la suite du calcul, nous allons chercher à exprimer la pression incidente sur le diffuseur  $i$  comme la somme infinie d'ondes partielles centrées sur la position  $\vec{r}_i$ , c'est à dire, sous la forme :

$$p_{in}^i(\vec{r}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} B_n^i J_n(k|\vec{r} - \vec{r}_i|) e^{in\phi_{\vec{r}-\vec{r}_i}} \quad (3.15)$$

La pression incidente sur un diffuseur étant donnée par la relation 3.14, il s'agit dans un premier temps d'écrire  $p_s(\vec{r}, \vec{r}_j)$  sous la forme d'une série modale autour de  $\vec{r}_i$ , ce que nous entreprenons en développant la fonction de Hankel selon un théorème d'addition présenté dans la référence [59] :

$$p_s(\vec{r}, \vec{r}_j) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i\pi A_n^j H_n^{(1)}(k|\vec{r} - \vec{r}_j|) e^{in\phi_{\vec{r}-\vec{r}_j}} \quad (3.16)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i\pi A_n^j \left[ e^{in\phi_{\vec{r}_i-\vec{r}_j}} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} H_{n-l}^{(1)}(k|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) e^{-il\phi_{\vec{r}_i-\vec{r}_j}} J_l(k|\vec{r} - \vec{r}_i|) e^{il\phi_{\vec{r}-\vec{r}_i}} \right] \quad (3.17)$$

$$= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \left[ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i\pi A_n^j H_{n-l}^{(1)}(k|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) e^{i(n-l)\phi_{\vec{r}_i-\vec{r}_j}} \right] J_l(k|\vec{r} - \vec{r}_i|) e^{il\phi_{\vec{r}-\vec{r}_i}} \quad (3.18)$$

$$= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} C_l^{j,i} J_l(k|\vec{r} - \vec{r}_i|) e^{il\phi_{\vec{r}-\vec{r}_i}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n^{j,i} J_n(k|\vec{r} - \vec{r}_i|) e^{in\phi_{\vec{r}-\vec{r}_i}} \quad (3.19)$$

avec

$$C_n^{j,i} = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} i\pi A_l^j H_{l-n}^{(1)}(k|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) e^{i(l-n)\phi_{\vec{r}_i-\vec{r}_j}} \quad (3.20)$$

De la même façon, il est possible d'écrire la fonction de Green en champ libre comme la somme d'ondes partielles :

$$p_0(\vec{r}) = i\pi H_0^{(1)}(kr) \quad (3.21)$$

$$= i\pi \sum_{l=-\infty}^{+\infty} H_{-l}^{(1)}(k|\vec{r}_i|) e^{-il\phi_{\vec{r}_i}} J_l(k|\vec{r} - \vec{r}_i|) e^{il\phi_{\vec{r}-\vec{r}_i}} \quad (3.22)$$

$$= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \left[ i\pi H_{-l}^{(1)}(k|\vec{r}_i|) e^{-il\phi_{\vec{r}_i}} \right] J_l(k|\vec{r} - \vec{r}_i|) e^{il\phi_{\vec{r}-\vec{r}_i}} \quad (3.23)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ i\pi H_{-n}^{(1)}(k|\vec{r}_i|) e^{-in\phi_{\vec{r}_i}} \right] J_n(k|\vec{r} - \vec{r}_i|) e^{in\phi_{\vec{r}-\vec{r}_i}} \quad (3.24)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S_n^i J_n(k|\vec{r} - \vec{r}_i|) e^{in\phi_{\vec{r}-\vec{r}_i}} \quad (3.25)$$

La relation 3.14 permet alors d'exprimer les coefficients  $B_n^i$  :

$$B_n^i = S_n^i + \sum_{j=1, j \neq i}^N C_n^{j,i} \quad (3.26)$$

$$B_n^i = i\pi H_{-n}^{(1)}(k|\vec{r}_i|) e^{-in\phi_{\vec{r}_i}} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \sum_{l=-\infty}^{+\infty} i\pi A_l^j H_{l-n}^{(1)}(k|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) e^{i(l-n)\phi_{\vec{r}_i - \vec{r}_j}} \quad (3.27)$$

A ce stade du calcul, les coefficients B et A restent inconnus.

Ces coefficients intervenant dans l'expression des pressions incidentes et diffusées d'un cylindre, il est possible de les relier grâce aux conditions aux limites élastiques en bord de diffuseur :

– Continuité de la pression à l'interface :

$$p_{ext}|_{\delta\Omega_i} = p_{int}|_{\delta\Omega_i} \quad (3.28)$$

– Continuité de la vitesse normale à l'interface :

$$\frac{1}{\rho_{eau}} \frac{\partial p_{ext}}{\partial \vec{n}} \Big|_{\delta\Omega_i} = \frac{1}{\rho_{acier}} \frac{\partial p_{int}}{\partial \vec{n}} \Big|_{\delta\Omega_i} \quad (3.29)$$

La pression interne au diffuseur  $i$  peut également s'exprimer sous forme modale :

$$p_{int}^i(\vec{r}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} D_n^i J_n(k_{acier}|\vec{r} - \vec{r}_i|) e^{in\phi_{\vec{r} - \vec{r}_i}} \quad (3.30)$$

La pression externe au cylindre  $i$  s'écrivant comme la somme des pressions incidentes et diffusées, les équations 3.28 et 3.29 forment un système de  $2N$  relations entre les coefficients A, B et D :

$$B_n^i J_n(ka) + i\pi A_n^i H_n^{(1)}(ka) = D_n^i J_n(ka/h) \quad (3.31)$$

$$B_n^i J_n'(ka) + i\pi A_n^i H_n^{(1)'}(ka) = \frac{1}{gh} D_n^i J_n'(ka/h) \quad (3.32)$$

avec  $a$  le rayon des diffuseurs,  $h$  le rapport des vitesses acier sur eau  $c_{acier}/c_{eau}$ , et  $g$  le rapport des densités  $\rho_{acier}/\rho_{eau}$ .

On élimine alors  $D_n^i$  pour obtenir une relation entre B et A :

$$B_n^i = i\pi \left[ \frac{H_n^{(1)'}(ka) J_n(ka/h) gh - H_n(ka) J_n'(ka/h)}{J_n'(ka) J_n(ka/h) gh - J_n(ka) J_n'(ka/h)} \right] A_n^i = i\pi \Gamma_n^i A_n^i \quad (3.33)$$

Dans l'équation 3.27, on remplace alors  $B_n^i$  par son expression en fonction de  $A_n^i$  :

$$\Gamma_n^i A_n^i = H_{-n}^{(1)}(k|\vec{r}_i|) e^{-in\phi_{\vec{r}_i}} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \sum_{l=-\infty}^{+\infty} A_l^j H_{l-n}^{(1)}(k|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) e^{i(l-n)\phi_{\vec{r}_i - \vec{r}_j}} \quad (3.34)$$

$$\Gamma_n^i A_n^i = T_n^i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \sum_{l=-\infty}^{+\infty} G_{l,n}^{i,j} A_l^j \quad (3.35)$$

en posant :

$$T_n^i = H_{-n}^{(1)}(k|\vec{r}_i|) e^{-in\phi_{\vec{r}_i}} \quad (3.36)$$

$$G_{l,n}^{i,j} = H_{l-n}^{(1)}(k|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) e^{i(l-n)\phi_{\vec{r}_i - \vec{r}_j}} \quad (3.37)$$

Si on limite le nombre de modes dans le calcul, 3.35 est une équation portant sur les coefficients A, soluble par une classique inversion de matrice. Le champ en tout point de l'espace s'écrit alors conformément à 3.14 :

$$p(\vec{r}) = i\pi H_0^{(1)}(k|\vec{r}|) + \sum_{i=1}^N \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i\pi A_n^i H_n^{(1)}(k|\vec{r} - \vec{r}_i|) e^{in\phi_{\vec{r} - \vec{r}_i}} \quad (3.38)$$

Il faut noter que le calcul est très efficace, puisque, une fois les coefficients A obtenus par inversion de matrice, il devient très rapide de calculer le champ en tout point de l'espace pour une fréquence, c'est-à-dire la fonction de Green  $G(\vec{r}, \vec{r}_s = 0, \omega)$ .

### 3.3.1 Mise en oeuvre de l'algorithme numérique

Le système à résoudre est tout entier contenu dans l'équation 3.35, que l'on peut réécrire de la façon suivante :

$$\Gamma_n^i A_n^i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \sum_{l=-\infty}^{+\infty} G_{l,n}^{i,j} A_l^j = T_n^i \quad (3.39)$$

La résolution du système passe tout d'abord par sa simplification : il est impossible de prendre en compte numériquement une infinité de modes. La somme sur  $l$  est donc tronquée symétriquement à la valeur 3 en règle générale de manière à ne considérer que les termes monopolaire à octupolaire dans le rayonnement de la tige. Cette approximation est valide pour peu que la fréquence de la simulation ne dépasse pas 1 MHz (nous expliquerons pourquoi dans la section suivante). Il est alors possible d'écrire 3.39 sous une forme matricielle classique, soit :

$$MA = T \quad (3.40)$$

Pour obtenir cette équation, il aura été nécessaire de réindicer (opération de *mapping*) les matrices  $A_n^i$  et  $T_n^i$  en matrices colonne (1D). Pour cela, on combine l'indice lié aux modes (n) avec l'indice lié aux diffuseurs (i) pour créer l'indice du nouveau vecteur colonne. La matrice G

doit subir le même sort, devient bidimensionnelle, et inclut de fait la contribution de  $\Gamma_n^i$  lorsque  $l=n$  et  $j=i$ . Le système se résout alors par une classique inversion de matrice :  $A = M^{-1}T$

### 3.3.2 Sections efficaces différentielles et nombre de modes

Dans cette partie, nous justifions l'emploi d'un nombre limité d'ondes partielles pour décrire le rayonnement d'une tige. Nous y adoptons une description des sections efficaces adaptée à la géométrie bidimensionnelle de nos expériences.

Lorsqu'une onde plane  $\psi_{inc}$  rencontre un diffuseur, l'amplitude  $\psi$  du champ acoustique après diffusion peut se décomposer en deux termes :

$\psi_{inc} = e^{-j(\omega t - \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r})}$  est le champ continuant à se propager dans la direction incidente,

$\psi_{diff} = F(r, \theta) \cdot e^{-j(\omega t)}$  est le champ diffusé avec des directions éventuellement privilégiées.

En champ lointain, le champ diffusé se réduit à une onde localement plane, pondérée par un coefficient de directivité  $f$  qui dépend de la forme du diffuseur et de la longueur d'onde. On peut alors écrire  $F(r, \theta)$  comme  $f(\theta) \cdot e^{j(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} / \sqrt{r}$  en géométrie 2D.

$f(\theta)$  est tantôt appelée *fonction de forme* tantôt *amplitude* ou *fonction de diffusion*.

La section efficace de diffusion  $\sigma(\theta)$  (parfois notée  $\partial\sigma/\partial\theta$  et appelée *section efficace différentielle*) est une mesure de la puissance diffusée dans chaque direction de l'espace relativement à l'intensité incidente. Elle est définie par le carré du module de la fonction de diffusion, soit, en géométrie bidimensionnelle :

$$\sigma(\theta) = |f(\theta)|^2 = r \cdot \frac{I_{diff}(r)}{I_{inc}} \quad (3.41)$$

où  $I_{diff}$  est l'intensité diffusée, et  $I_{inc}$  l'intensité de l'onde incidente.

La section efficace totale  $\sigma_T$  chiffre le pouvoir diffusant global du diffuseur. Elle est homogène à une surface en 3D, à une longueur en 2D, et se calcule en intégrant sur l'espace la section différentielle :

$$\sigma_T = \int_0^{2\pi} \sigma(\theta) d\theta$$

Dans l'objectif de valider l'approximation qui consiste à prendre en compte les ondes partielles jusqu'au mode octupolaire dans la formule 3.13, nous calculons la section efficace totale de diffusion d'une tige en prenant en compte un nombre croissant de modes (figure 3.8).

Nous constatons sur cette figure que le nombre d'ondes partielles utilisé dans le développement conditionne étroitement la gamme de fréquence dans laquelle l'expression de la pression diffusée est correcte. Avec 4 modes, nous sommes capables de décrire la section de diffusion d'un diffuseur liquide à mieux que 0,3 % jusque 1 MHz.

Il serait inutile d'augmenter au-delà de 4 le nombre de modes pour décrire le rayonnement d'une tige. En effet, nous pouvons constater sur la figure 3.8 que la section efficace totale de diffusion d'un diffuseur liquide s'écarte notablement de celle d'un diffuseur solide au-delà de

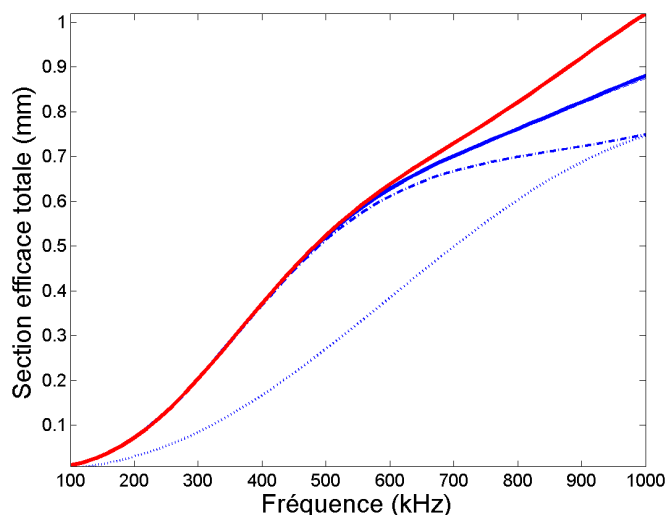


FIG. 3.8 – Section efficace totale de diffusion d'une tige en acier de 0,8 mm de diamètre, calculée à partir de l'équation 3.13 en prenant en compte une (pointillés bleus), deux (tirets bleus), quatre ondes partielles (confondu avec le trait continu bleu). Calculs exacts menés sur un diffuseur liquide (trait continu bleu) et solide (trait continu rouge).

600 kHz.

Nous représentons sur un même graphe (figure 3.9) les sections différentielles de diffusion d'un diffuseur cylindrique solide et liquide pour deux fréquences particulières (500 kHz et 1 MHz). Si l'approximation consistant à négliger les ondes transverses au sein du diffuseur semble raisonnable à 500 kHz, fréquence d'apparition de la première bande interdite dans la direction  $\Gamma X$ , elle l'est beaucoup moins à 1 MHz. A cette dernière fréquence, l'utilisation d'un diffuseur liquide à la place d'un diffuseur élastique sous-estime l'énergie diffusée par chacune des tiges vers celles de la même rangée (directions  $+90^\circ$  et  $-90^\circ$ ). De même, l'énergie renvoyée dans la direction d'illumination et vers l'avant est sous-estimée.

Toute erreur portant sur l'évaluation du rayonnement d'un diffuseur unique est susceptible d'être amplifiée au fur et à mesure de la propagation. Il faut donc s'attendre à ce que la relation de dispersion calculée à l'aide de la PWE, ainsi que la transmission calculée à l'aide de la méthode self-consistante ne soient pas exactes pour les plus hautes fréquences.

### 3.3.3 Résultats

De nombreux essais ont été requis pour déterminer la bonne configuration des différents éléments (source, cristal, récepteur) tout en limitant le temps de calcul. Le critère de validité étant l'accord avec les résultats expérimentaux, la simulation doit vérifier plusieurs conditions :

La source ponctuelle doit tout d'abord être placée en champ lointain afin d'éclairer l'échantillon par une onde plane. Cela nous permet, comme en expérience, de déterminer la transmission spécifique à une direction cristallographique donnée. En cela, notre protocole diffère de celui décrit dans l'article original [59], dans lequel source et récepteur sont en champ proche de l'échantillon "*so that the boundary effects do not suppress the band gaps*".

Ensuite, le récepteur doit se trouver en champ proche du cristal. A une distance de un pas de la dernière rangée de tiges (soit 1,5 mm), la bande interdite apparaît correctement (figure 3.10),

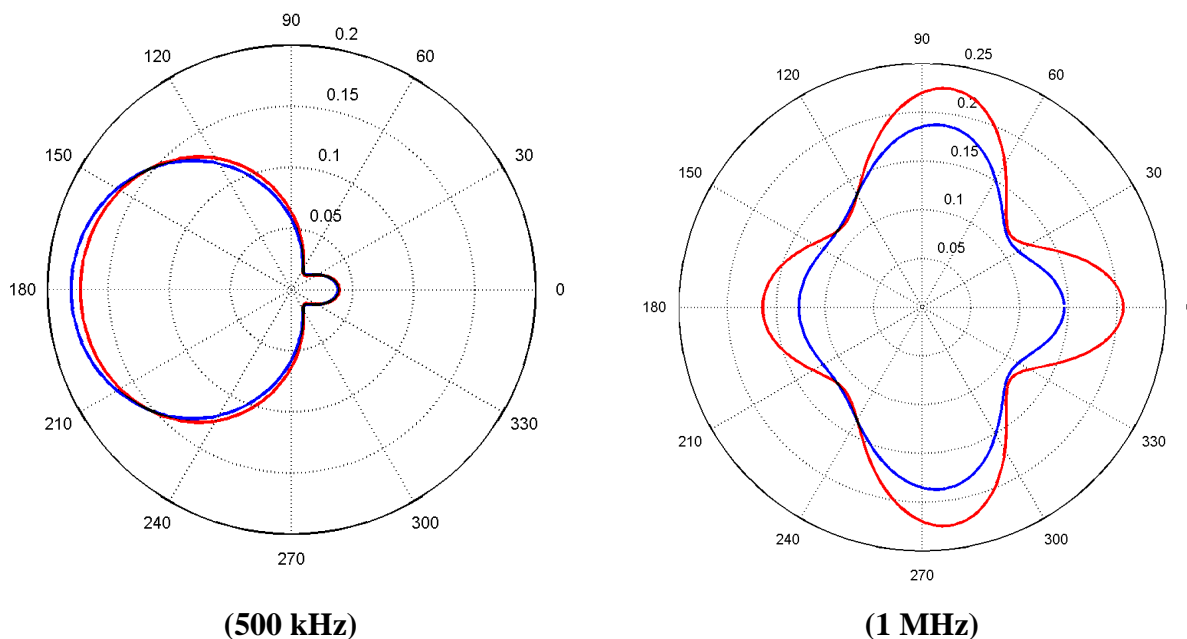


FIG. 3.9 – Sections efficaces différentielles de diffusion d'un cylindre calculées avec la formule 3.13 (bleu) et en prenant en compte la vitesse transverse dans l'acier (rouge). La diffusion vers l'avant correspond à l'angle 0 degré.

alors que celle-ci est profondément affectée par les ondes de bord en champ lointain (à 1000 pas du cristal sur la figure 3.11). Expérimentalement, ce problème de diffraction de l'onde incidente par les bords du cristal ne se pose pas car la directivité du transducteur source nous permet de n'éclairer qu'une portion du cristal.

A épaisseur d'échantillon constante, le facteur de transmission varie selon le nombre de tiges dans la direction transverse à l'insonification. Quand ce nombre est réduit, les bandes interdites ne sont pas correctement définies (figure 3.12). Une quarantaine de tiges sur chaque rangée de cristal simulé semble constituer un minimum pour reproduire les résultats expérimentaux obtenus à partir d'échantillons constitués de 100 tiges par rangée. Ceci laisse penser que les processus de diffusion au sein d'une même rangée de tiges sont importants pour comprendre la formation de la bande interdite.

Enfin, certains échantillons épais nécessitent de moyenner la transmission sur plusieurs positions du cristal relativement au couple émetteur-récepteur afin d'éliminer des oscillations résiduelles dans la bande interdite (figure 3.14). Nous attribuons ces oscillations particulières de la transmission à la mesure en champ proche.

A titre de comparaison, nous calculons le facteur de transmission d'un échantillon désordonné de même fraction surfacique de diffuseurs que les échantillons ordonnés, à savoir 22% (figure 3.13). Dans le cas de l'échantillon ordonné, nous constatons la présence de plusieurs

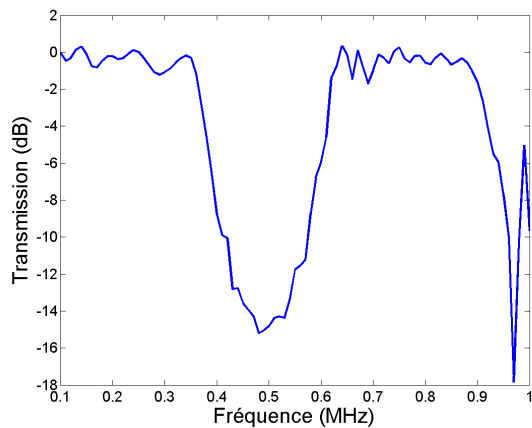


FIG. 3.10 – Transmission simulée dans la direction  $\Gamma X$  sur un cristal de 4 rangées de 41 tiges à une **distance de 1,5 mm** de la dernière rangée de tiges

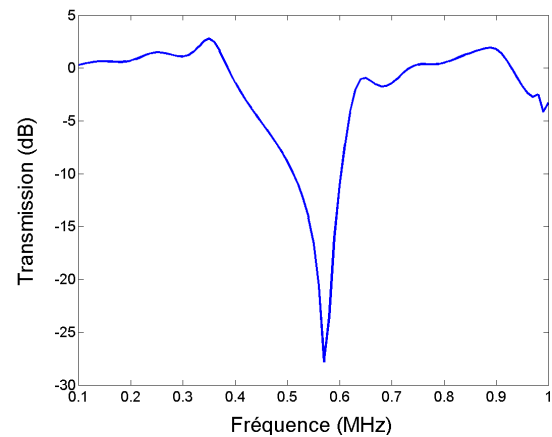


FIG. 3.11 – Transmission simulée dans la direction  $\Gamma X$  sur un cristal de 4 rangées de 41 tiges à une **distance de 1,5 m** de la dernière rangée de tiges

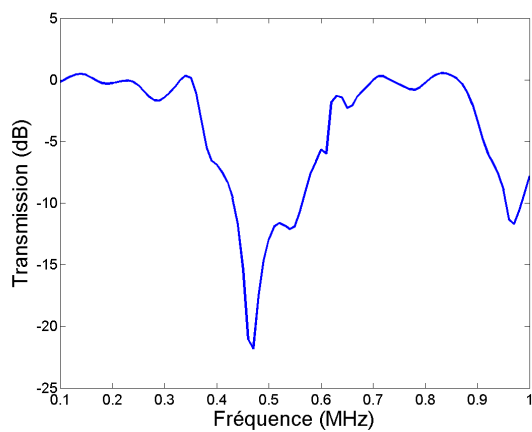


FIG. 3.12 – Transmission simulée dans la direction  $\Gamma X$  sur un cristal de **4 rangées de 11 tiges**.

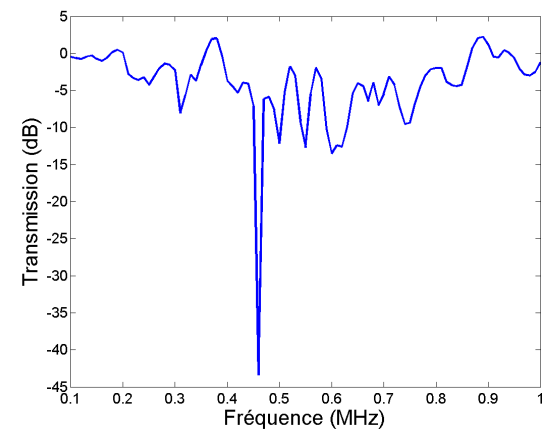


FIG. 3.13 – Transmission simulée sur un **échantillon désordonné** de 4x41 tiges de même fraction surfacique que les échantillons ordonnés.



larges plages de fréquences atténuées, que nous ne retrouvons pas dans la transmission de l'échantillon désordonné. S'il en était besoin, nous confirmons ainsi l'origine de la bande interdite dans la présence de diffuseurs régulièrement placés au sein de l'échantillon.

Maintenant que nous maîtrisons les paramètres optimaux pour simuler nos cristaux, nous pouvons comparer les résultats des simulations avec les mesures expérimentales sur un échantillon épais, par exemple un cristal constitué de 8 rangées de 100 tiges (figure 3.14).

En dépit des écarts observés à haute fréquence entre les sections différentielles de diffusion réelles et simulées, la position des bandes interdites correspond globalement à celle que l'on mesure expérimentalement. La justification vient du fait qu'en deçà de 1 MHz, la contribution élastique à la section efficace totale reste faible devant la contribution rigide. Notons tout de même que l'accord entre simulation et expérience est parfait en dessous de 500 kHz, et moins bon au-delà. Nous retrouvons ici la fréquence à partir de laquelle nous avons montré que la section d'un diffuseur liquide divergeait de celle d'un diffuseur solide (figure 3.8).

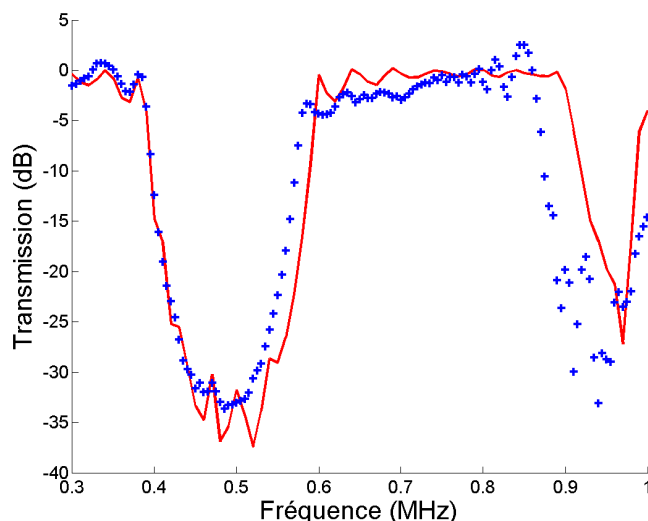


FIG. 3.14 – Comparaison de la transmission mesurée sur un cristal de 8 rangées de tiges dans la direction  $\Gamma X$  (croix bleus) avec le calcul self-consistant mené sur un échantillon de  $8 \times 41$  tiges (rouge). La transmission calculée résulte d'une moyenne sur 6 positions du cristal, déplacé transversalement de  $\lambda/2$  entre chaque simulation.

L'information de phase est relativement délicate à extraire de ce genre de simulation, puisqu'elle nécessite un échantillonnage fréquentiel important. Pour résoudre efficacement les sauts de phase, il est en effet nécessaire d'adapter le pas fréquentiel de la simulation à la distance  $d$  entre la source et le récepteur. Si l'on souhaite disposer d'au moins  $n$  points entre chaque saut de phase, la relation  $\Delta\varphi = \Delta(kd) > 2\pi/n$  doit être vérifiée. Pour une distance  $d = 1000$  pas de cristal et  $n = 5$ , cela conduit à un échantillonnage fréquentiel à mieux que 200 Hz. De fait, le calcul est très long et c'est pourquoi nous nous sommes limités à la plus simple des structures périodiques présentant une bande interdite marquée pour calculer la vitesse de phase d'un cristal de 4 rangées de 41 tiges (figure 3.15). A titre indicatif, il aura fallu pas moins de 12 jours sur un processeur AMD Opteron™ à 2,2 GHz pour calculer la transmission d'un échantillon de 4 rangées de 41 tiges entre 0 et 1 MHz, par pas de 0,2 kHz.

Si le phénomène de dispersion anormale apparaît indiscutablement sur la vitesse de phase

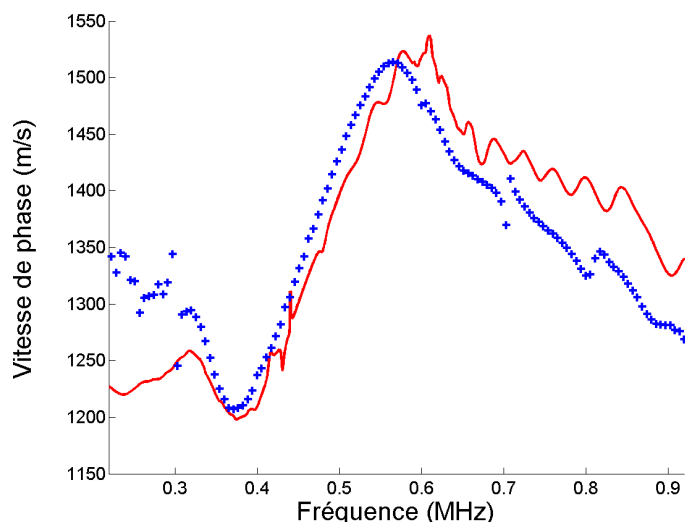


FIG. 3.15 – Vitesse de phase d'un cristal phononique de 4 rangées de 41 tiges calculée à l'aide du code self-consistant (rouge), comparée à la vitesse de phase mesurée sur un échantillon de 4 rangées de tiges dans la direction  $\Gamma X$  (croix bleues).

issue du calcul self-consistant, l'accord avec les résultats expérimentaux est moins bon pour les fréquences inférieures et supérieures à la première bande interdite. Pour les fréquences supérieures, cela peut probablement s'expliquer par l'imprécision de la section efficace de diffusion. La question reste cependant ouverte pour les fréquences inférieures.

### 3.4 Simulation aux différences finies

Pour simuler la propagation d'ondes acoustiques au sein d'un cristal phononique, nous avons également pu bénéficier d'un code aux différences finies développé au Laboratoire Ondes et Acoustique par Mickaël Tanter. Acel est un logiciel écrit en C++ qui est capable de résoudre les équations de propagation 2D et 3D en les discrétisant dans l'espace et dans le temps. La simulation peut utiliser un code acoustique ou élastique, et les milieux de propagation peuvent être absorbants ou non.

A ce jour, de nombreuses expériences réalisées au laboratoire ont pu être simulées avec ce code : Retournement Temporel en milieu multiplement diffuseur [62] et dans des cavités ergodiques [63], propagation ultrasonore à travers le crâne [64] et interaction son-vorticité [65]. Dans chacun de ces cas, un très bon accord entre la simulation et l'expérience a pu être constaté. Il nous a donc semblé intéressant de disposer d'un tel outil pour simuler la propagation d'ondes ultrasonores au sein des cristaux phononiques conçus.

La première étape a consisté à s'assurer de la bonne reproduction du comportement d'un diffuseur unique. Nous avons pu, sur cet exemple simple, comparer les codes acoustiques et élastiques.

Dans cette première simulation, une barrette de sources est positionnée face au cylindre de manière à générer une onde plane, et 360 récepteurs ponctuels sont disposés sur un cercle autour du diffuseur (figure 3.16).

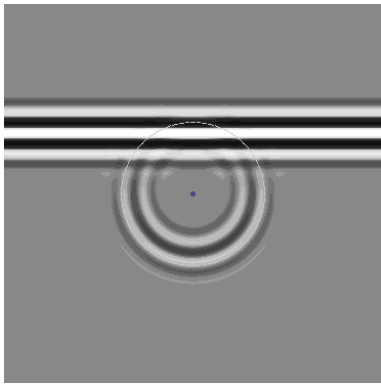


FIG. 3.16 – Représentation du champ acoustique calculé par Acel lors de la propagation d'une onde plane incidente (2 périodes à 500 kHz) dans l'eau avec un cylindre métallique (au centre). Le cercle des 360 récepteurs apparaît ici en points blancs, tandis que les sources se trouvent plus bas, en dehors de l'image.

Deux simulations sont nécessaires pour calculer la section différentielle de la tige : l'une dans laquelle la tige est positionnée au centre des récepteurs, l'autre servant à acquérir le signal de référence en l'absence de la tige. On enregistre respectivement  $S(t)$  et  $S_0(t)$ . L'onde diffusée par le cylindre s'écrit  $D(t) = S(t) - S_0(t)$ .

Le signal émis par la barrette est une impulsion courte (2 périodes) : il est donc nécessaire de filtrer en bande étroite les signaux  $D(t)$  et  $S_0(t)$  autour de la fréquence à laquelle nous souhaitons calculer la section différentielle. Cette dernière s'obtient alors conformément à la formule 3.41.

Dans une simulation aux différences finies, l'espace (ici bidimensionnel, compte tenu de la géométrie du problème) est nécessairement discrétisé. Le pas de la grille de discrétisation conditionne la manière dont les objets sont représentés dans la simulation. Pour un diffuseur circulaire de diamètre donné, on a évidemment intérêt à choisir un pas de grille le plus petit possible. Cela n'est souvent pas possible, pour des raisons de temps de calcul et d'espace mémoire.

Compte tenu de nos capacités de calcul, nous avons pu utiliser un pas spatial de 0,15 mm, ce qui correspond à  $\lambda/10$  dans l'eau à 1 MHz. Le diffuseur étant représenté par un nombre entier de pixels, son diamètre simulé n'est pas 0,8 mais 0,75 mm. Le pas temporel de la simulation est déterminé par le logiciel de manière à éviter la dispersion numérique.

Dans ces conditions, nous représentons tout d'abord les sections différentielles de tiges simulées avec Acel en code acoustique, à 500 kHz et 1 MHz et les comparons aux sections différentielles théoriques d'une tige de 0,8 mm de diamètre (figure 3.17). Les sections différentielles obtenues avec le code aux différences finies sont presque toujours supérieures à celles prévues théoriquement pour un diffuseur liquide (en dépit d'une taille de diffuseur inférieure de 0,05 mm). La différence est faible à 500 kHz, et plus importante à 1 MHz, surtout dans la direction incidente.

En code élastique, les différences entre la simulation et la section théorique d'un diffuseur solide sont plus marquées, et ce dès 500 kHz (figure 3.18). Cette différence provient de la discrétisation grossière du diffuseur, qui ne permet pas de décrire convenablement les conversions de modes en bord de diffuseur. Cette limitation, combinée avec la nécessité d'inclure un grand

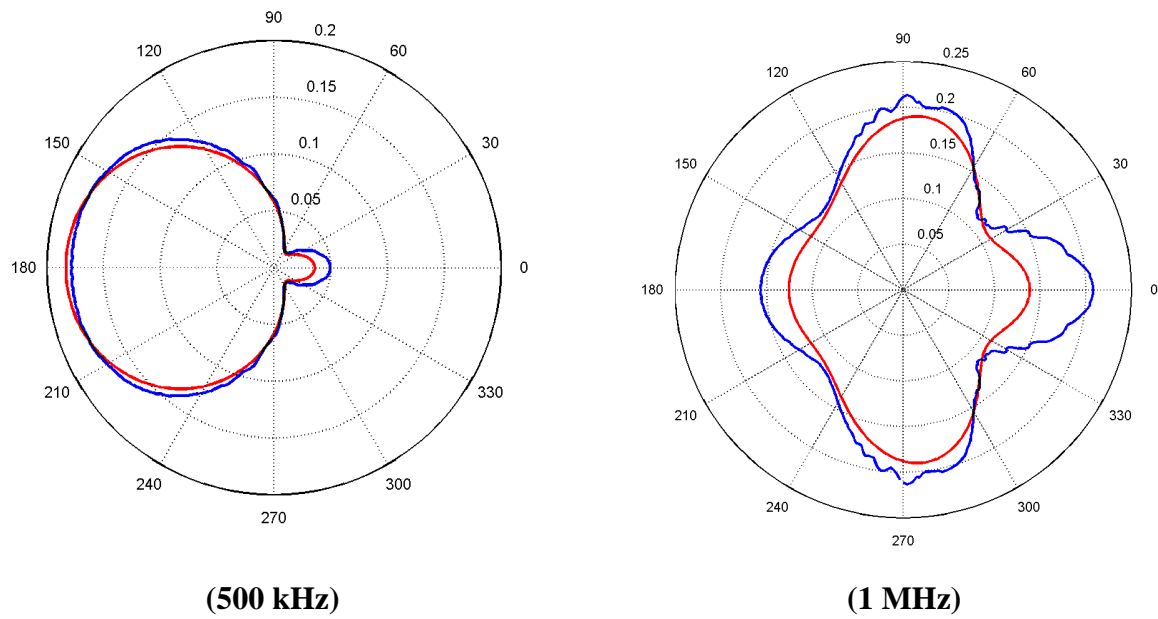


FIG. 3.17 – Section efficace différentielle d’une tige simulée par Acel en code acoustique (bleu), calcul exact pour un diffuseur liquide (rouge)

nombre de tiges dans la simulation, ne nous a pas permis d’utiliser ce code, malgré le fort intérêt que nous y trouvions. Les résultats obtenus avec Acel en code acoustique seront donc, ici encore, exploitables dans une gamme de fréquences limitée par la précision de la section efficace.

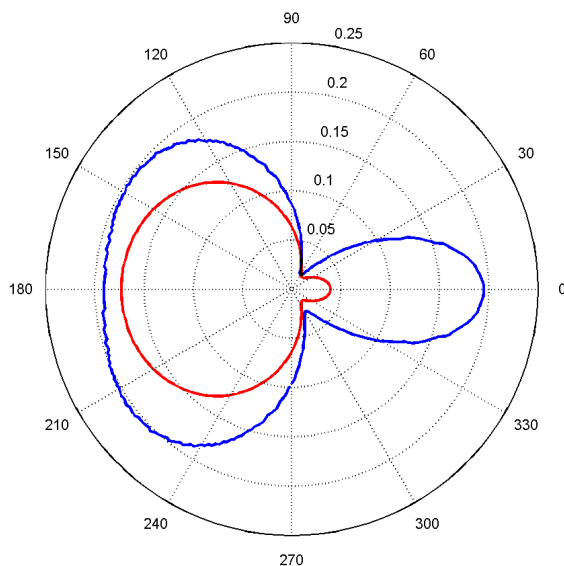


FIG. 3.18 – Section efficace différentielle d’une tige simulée par Acel en code élastique à 500 kHz (bleu), calcul exact pour un diffuseur solide (rouge).

Le cadre de la modélisation étant fixé, nous cherchons désormais à simuler des arrangements périodiques de diffuseurs.

La simulation nous permet alors de positionner des sources et des récepteurs relativement au cristal de manière à envoyer une onde plane et enregistrer la transmission en plusieurs points, comme nous procédons expérimentalement (figure 3.19).

Le cristal est centré sur la grille de simulation. Les sources sont placées à quelques pixels du bord inférieur de l'échantillon, de manière à bénéficier d'un temps de simulation maximum avant l'arrivée du rebond issu du bord inférieur de la grille. Les récepteurs sont espacés de  $\lambda/2$ , et regroupés en ligne à quelques pixels de la face arrière du cristal à proximité de son centre, de manière à minimiser l'influence des ondes de bord. Ici encore, la transmission est calculée sur une onde moyenne (figure 3.20), obtenue en sommant les contributions enregistrées en chacun des récepteurs. Ceci est le moyen que nous utilisons pour réduire les oscillations de la transmission au sein de la première bande interdite, qui n'apparaissent pas dans la transmission calculée à partir de l'onde cohérente enregistrée expérimentalement.

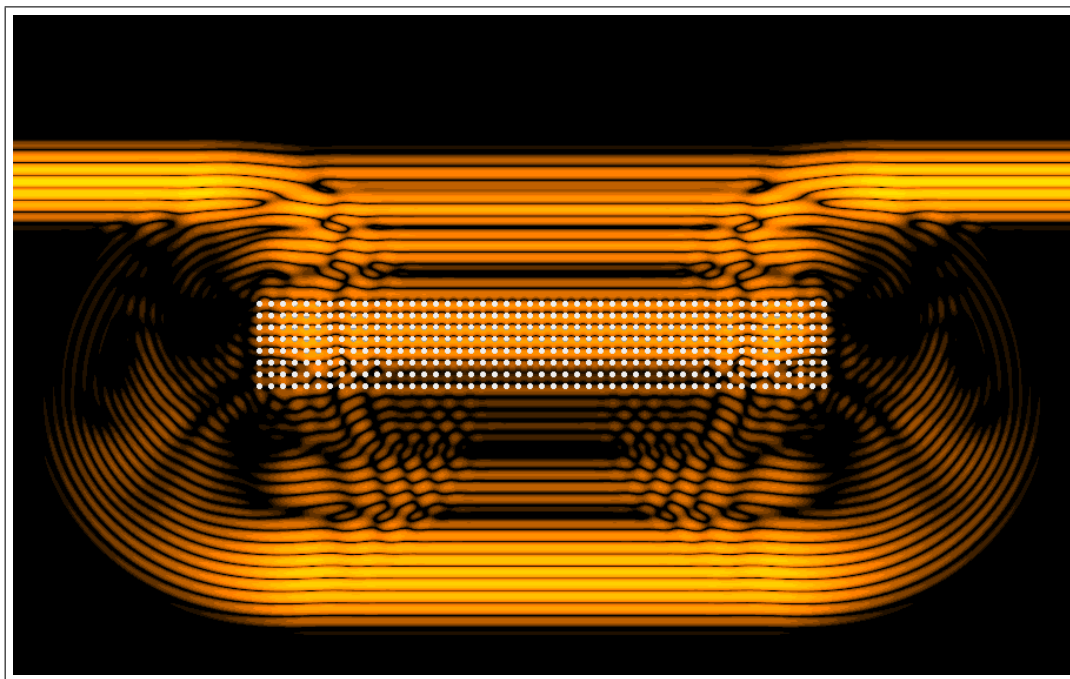


FIG. 3.19 – Propagation d'une onde plane incidente sur un cristal phononique de 8 rangées de tiges. L'onde plane initiale, constituée de 2 périodes à 500 kHz, est encore visible sur les bords supérieurs de l'image, tandis que les ondes transmises et réfléchies apparaissent respectivement au dessus et en dessous de l'échantillon. Les ondes diffractées par les bords du cristal sont ici mises en évidence.

En nous limitant au code acoustique, et en dépit des différentes approximations nécessaires (discrétisation des cylindres, diffuseurs liquides), les résultats obtenus avec le code aux différences finies sont en remarquable accord avec les résultats expérimentaux.

L'atténuation (figure 3.21) et la vitesse de phase (figure 3.22) sont correctement décrites jusque 920 kHz. En particulier, nous obtenons ici la confirmation du phénomène de dispersion anormale à partir de 890 kHz, révélatrice d'un *stopband* dans la direction  $\Gamma X$ , conformément

aux résultats déjà obtenus avec la PWE et le modèle self-consistant.

Le temps de groupe autour de la première bande interdite obtenu à partir de l'onde cohérente calculée avec Acel se compare également favorablement aux résultats expérimentaux. Dans la bande interdite, l'effet tunnel se manifeste par un temps de groupe inférieur à celui mesuré dans l'eau ( $7,5 \mu\text{s}$ ), conformément à nos attentes. Les résonances en bord de bande interdite sont apparentes, mais légèrement décalées en fréquence par rapport à l'expérience du fait de l'écart de diamètre entre les diffuseurs simulés et les tiges réelles.

Ce genre de simulation présente de nombreux intérêts. Contrairement à la méthode d'expansion en ondes planes, le cristal ici simulé est réel, c'est-à-dire de taille finie. Eventuellement, celui-ci peut présenter des défauts : il est possible de supprimer, déplacer, ajouter une ou des tiges.

Ensuite, le code aux différences finies est *a priori* susceptible de simuler des diffuseurs solides dans un liquide, ce qui n'est pas le cas de la PWE. De plus, il permet d'obtenir une cartographie du champ de pression à tout temps et en tout point, alors que la méthode self-consistante travaille dans le domaine des fréquences. Comparativement, le code aux différences finies est plus véloce que cette dernière méthode à résolution temps-fréquence égale, ce qui lui confère un avantage certain pour le calcul de la phase.

En revanche, travailler dans le domaine temporel avec un code aux différences finies a un prix : les conditions aux limites en bord de grille créent un rebond qui peut perturber la transmission. La durée de la simulation est donc limitée par le temps d'arrivée aux récepteurs de ce rebond. Cela oblige à choisir une grille de taille souvent très supérieure à celle du cristal en lui-même, et ralentit d'autant la simulation.

Enfin, nous avons vu que la nécessaire discrétisation des diffuseurs implique des écarts à la réalité de l'ordre du pas spatial de la simulation. Au vu des résultats, cette limitation n'est pas si importante (sauf peut-être en code élastique) puisque l'onde n'est pas sensible aux détails de l'ordre du dixième ou du vingtième de la longueur d'onde.

Ce passage en revue de diverses méthodes pour simuler la propagation au sein de cristaux phononiques nous a permis de mieux cerner les limites et intérêts de chacune d'entre elles.

En particulier, il est apparu que le modèle unidimensionnel donnait de très bons résultats et permettait de reproduire convenablement toutes les caractéristiques de la première bande interdite (atténuation, vitesse de phase, temps de groupe). Au vu de sa rapidité d'exécution, c'est donc un candidat de choix pour étudier tout ce qui a trait à la phase au sein de la première bande interdite. La méthode d'expansion en ondes planes souffre quant à elle d'une limitation intrinsèque à partir du moment où on l'utilise pour simuler la propagation au sein de cristaux de dimensions finies, puisqu'elle ne permet pas d'obtenir la transmission au sein de la bande interdite. De plus, l'apparition de problèmes de convergence pour simuler des inclusions solides dans un liquide nous contraint à négliger les ondes transverses au sein des diffuseurs, ce qui a pour effet de rendre inexacts les relations de dispersion pour  $kr > 1$ . Le calcul self-consistant, aussi séduisant qu'il paraisse, souffre de la même limitation et s'avère extrêmement gourmand en temps de calcul (mais ceci n'est pas une caractéristique intrinsèque de la méthode, et peut

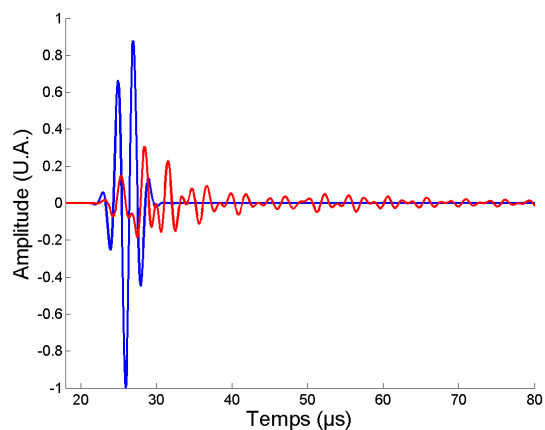


FIG. 3.20 – Signaux temporels en transmission calculés avec Acel pour un échantillon de 8 rangées de tiges (rouge), dans l'eau (bleu).

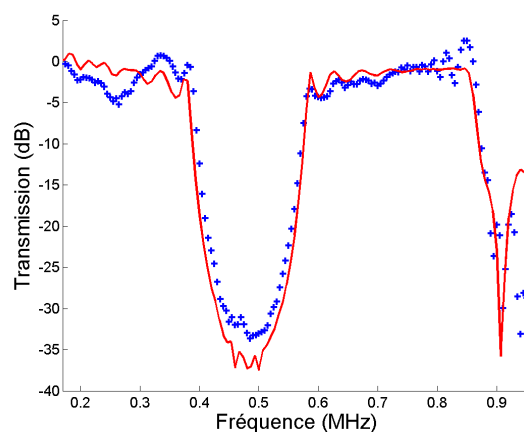


FIG. 3.21 – Atténuation en transmission pour un échantillon de 8 rangées de tiges (Acel en rouge, expérience en bleu).

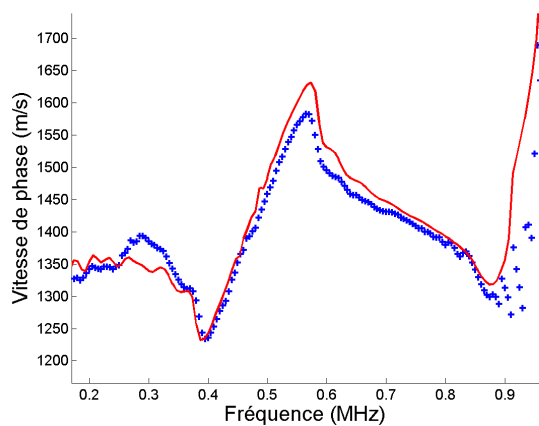


FIG. 3.22 – Vitesse de phase pour un échantillon de 8 rangées de tiges (Acel en rouge, expérience en bleu).

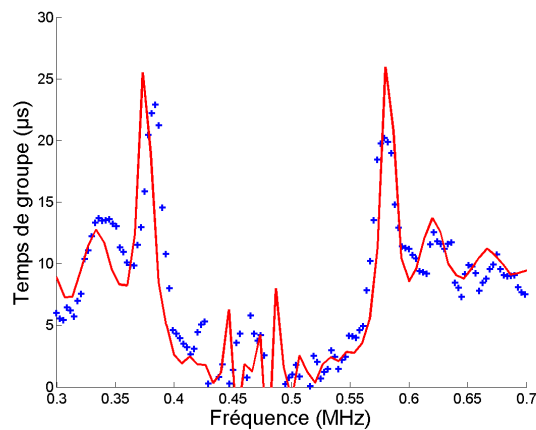


FIG. 3.23 – Temps de groupe pour un échantillon de 8 rangées de tiges (Acel en rouge, expérience en bleu).

probablement être optimisé<sup>§</sup>). Enfin, la simulation aux différences finies, déjà très performante en code acoustique, semble présenter quelques difficultés à simuler correctement les hétérogénéités du milieu en code élastique.

En étant conscient des limitations inhérentes à chacune de ces simulations, nous pouvons désormais utiliser ces dernières pour sonder les propriétés des cristaux phononiques, aussi bien que pour appuyer de nouvelles réalisations<sup>¶</sup>. Au cours de cette thèse, elles nous ont servi de support pour diverses expériences, comme nous pourrons le constater dans les chapitres suivants.

---

<sup>§</sup> Actuellement, le code prend en compte le couplage de toutes les tiges entre elles. Il doit être possible de diminuer largement le temps de calcul en ne considérant que les interactions entre tiges voisines, dans un périmètre d'interaction à déterminer.

<sup>¶</sup> Notons que C. Qiu vient de publier un article présentant une variante de la méthode self-consistante adaptée à la géométrie 2D, prenant en compte les ondes transverses [58], qu'il serait intéressant d'implémenter et de comparer avec nos résultats expérimentaux.





## Chapitre 4

# Fabry-Pérot acoustique

L'effet tunnel est généralement étudié dans le contexte de la mécanique quantique : une particule d'énergie inférieure à la hauteur d'une barrière de potentiel possède une probabilité très faible, mais non nulle, de passer de l'autre côté.

Nous avons mis en évidence, dans le chapitre 2, une analogie possible entre un cristal phononique en acoustique et une barrière de potentiel en mécanique quantique. En effet, pour les fréquences de la bande interdite, le mode de transmission à travers un cristal s'apparente à un mécanisme d'effet tunnel. Ayant observé une manifestation de l'effet tunnel pour un cristal unique, nous avons dès lors jugé intéressant d'étudier une structure composée de deux cristaux phononiques délimitant une cavité résonante. L'objectif avéré était de mettre en évidence l'effet tunnel résonant dans une telle structure. Cet effet, qui est exploité industriellement dans de nombreux dispositifs, est extrêmement intrigant, non seulement parce que la transmission approche l'unité aux résonances, mais également parce que l'on s'attend à observer un temps de groupe aux résonances augmentant exponentiellement avec l'épaisseur des barrières de potentiel.

Dans ce chapitre, nous analysons donc une expérience acoustique présentant de fortes analogies avec l'effet tunnel résonant en mécanique quantique. Dans cette perspective, nous avons assemblé une paire de cristaux phononiques en laissant un espace uniforme entre deux, de manière à former une cavité résonante. La mesure de la transmission ultrasonore laisse apparaître des pics de résonance de type "Fabry-Pérot" pour certaines fréquences au sein de la bande interdite, là où les ondes transitent par effet tunnel dans chacun des cristaux. Pour ces fréquences, le temps de groupe mesuré devient très important, et croît exponentiellement avec l'épaisseur des barrières quand l'absorption est négligeable. Entre les résonances, nous enregistrons un temps de groupe très faible, caractéristique de l'effet tunnel.

Nous décrirons dans un premier temps le comportement stationnaire de la structure de type Fabry-Pérot insonifiée par une onde plane ultrasonore en incidence normale. Nous mettrons ensuite en évidence l'analogie forte qui relie cette expérience à l'effet tunnel résonant quantique en étudiant les propriétés dynamiques des échantillons. Cela nous conduira naturellement à éprouver les limites de cette analogie, puisque les ondes acoustiques demeurent avant tout "classiques".

## 4.1 Dispositif expérimental

Au cours des différentes expériences menées sur les structures de type Fabry-Pérot, les échantillons ont été réalisés en utilisant le même type de cristaux phononiques que ceux décrits au chapitre 2. Une première technique a consisté à assembler deux cristaux identiques en utilisant un support coulissant de manière à pouvoir ajuster la taille de la cavité formée par les deux cristaux. Cette approche s'est révélée plutôt décevante en raison des erreurs de parallélisme qui ont tôt fait de détruire la condition de résonance de la cavité. Une deuxième approche a consisté à percer une unique plaque d'époxy aux dimensions de la cavité, et à se servir de cette plaque comme support des tiges (figure 4.1). La taille de la cavité n'est donc plus une variable continue, mais un multiple du nombre de tiges manquantes. Nous avons la plupart du temps utilisé des échantillons fabriqués en retirant les 6 rangées de tiges centrales d'un cristal de 10, 12, 14, 16 rangées.

En raison de la faible fraction surfacique des diffuseurs dans nos échantillons, la bande interdite ne s'étend pas sur l'ensemble du spectre des vecteurs d'onde incidents. Cela est sans importance pour la conception de nos Fabry-Pérot, puisque nous les insonifions dans la direction  $\Gamma X$  des cristaux, là où la bande interdite est la plus large en fréquence\*.

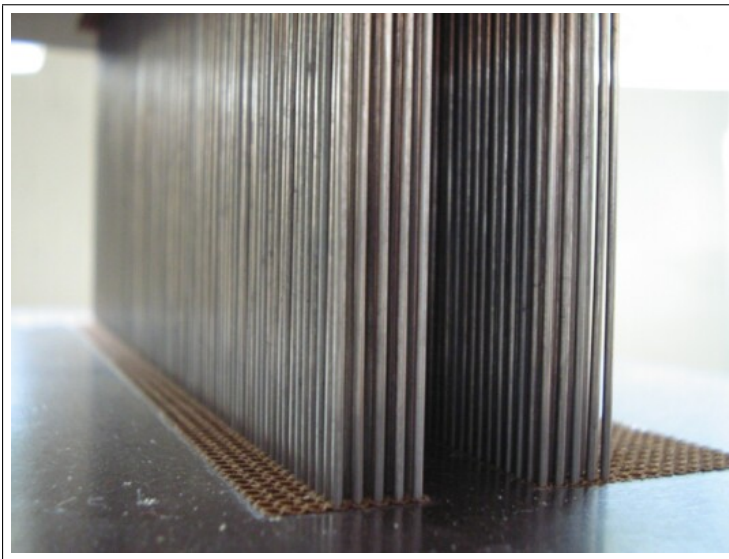


FIG. 4.1 – Fabry-Pérot acoustique créé à partir de deux cristaux phononiques bidimensionnels de 5 rangées de tiges.

Le dispositif expérimental mis en place pour mesurer la transmission est exactement le même que celui utilisé pour acquérir l'onde cohérente sur les échantillons "simples". Il s'agit de la technique de moyennage sur différentes positions du couple émetteur/récepteur relativement au cristal, couplée à des moyennes temporelles pour éliminer le bruit électronique.

L'acquisition d'un signal temporel très long, nécessaire au traitement de la totalité de l'information provenant de la structure, est encore affaire de compromis. En effet, le transducteur source, de rayon  $a$  important, fournit un faisceau collimaté jusqu'à la distance de Fresnel  $a^2/\lambda$ , soit à peu près 12 cm dans notre cas (transducteur IMASONIC de diamètre 38 mm). Au-delà, la

\*Le ratio "largeur sur fréquence centrale de la bande interdite" valant alors à peu près 37%

condition d'illumination par une onde plane ne tient plus<sup>†</sup>. En outre, il faut mentionner la forte réflectivité de la structure Fabry-Pérot pour la majeure partie des ondes incidentes de fréquence comprise dans la bande interdite des cristaux. L'impulsion ultrasonore émise par le transducteur source est donc essentiellement réfléchiée par l'échantillon, avant de rebondir sur la surface du transducteur puis d'illuminer à nouveau la structure. Cela constitue une limite du temps d'enregistrement autour de  $160\ \mu\text{s}$  (correspondant au temps d'aller-retour de l'impulsion dans l'eau) dont on ne peut s'affranchir facilement. En effet, si nous souhaitions disposer d'un temps d'acquisition plus long, il aurait fallu non seulement s'équiper d'un nouveau transducteur de diamètre plus important mais également disposer d'un échantillon de hauteur plus importante<sup>‡</sup>.

## 4.2 Résonances Fabry-Pérot en transmission

Pour des cristaux de faible épaisseur (jusqu'à deux fois quatre rangées), les signaux transmis à travers les structures Fabry-Pérot laissent apparaître aux temps longs des "bouffées de signal", semblables à un battement de fréquences (figure 4.2). Les signaux enregistrés avec des échantillons constitués d'un plus grand nombre de rangées de tiges ne sont pas aussi lisibles.

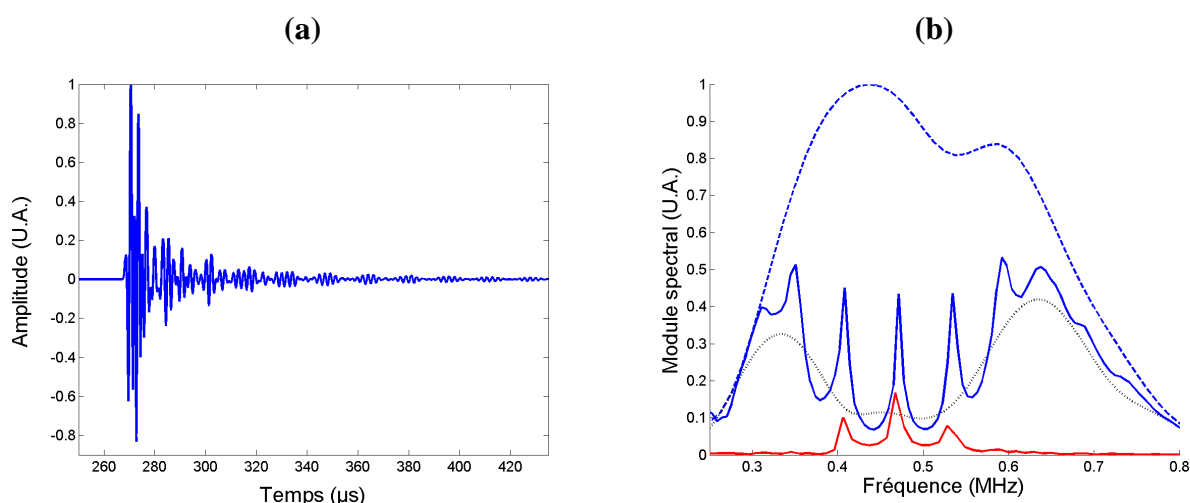


FIG. 4.2 – **Figure a** : signal temporel (onde cohérente) enregistré en transmission dans l'échantillon de deux fois trois rangées avec une cavité correspondant à 6 tiges manquantes (échantillon que nous appellerons désormais **FP3**), en réponse à une impulsion brève. **Figure b** : bande passante du transducteur (tirets bleus), contenu spectral du signal transmis à travers **FP3** (trait continu bleu). Le contenu fréquentiel des quatorze premières microsecondes de signal est représenté en pointillés noirs, tandis que celui des bouffées de signal diffusé multiplement est représenté en trait continu rouge.

Le spectre du signal transmis laisse apparaître des résonances à des fréquences régulières-

<sup>†</sup>Dans des conditions où le faisceau incident présente une divergence plus importante, nous avons observé un dédoublement des pics de résonance, ce qui ne permettait plus de mener l'analyse des hauteurs de pics ni l'étude du temps de groupe.

<sup>‡</sup>supérieure au diamètre du nouveau transducteur, afin de ne pas générer de réflexions parasites sur les supports.

ment espacées au sein de la bande interdite. Plus précisément, ces résonances interviennent quand la taille de la cavité approche un multiple entier de la demi-longueur d'onde.

Nous mettons en évidence l'origine de ces résonances en analysant le contenu spectral des bouffées de signal. Le spectre tracé en rouge dans la figure 4.2 est calculé sur les signaux transmis entre 325 et 435  $\mu\text{s}$ . Ces signaux arrivant aux temps longs, qui correspondent à des ondes ayant séjourné longtemps dans la cavité en réalisant de multiples aller-retour, sont donc responsables de l'apparition des résonances.

A contrario, le signal échantillonné dans les quatorze premières microsecondes de la réponse impulsionnelle ne contient pas d'information sur les résonances, mais sur la bande interdite (que l'on voit se dessiner sur le spectre en pointillés noirs de la figure 4.2).

Sur les signaux temporels mesurés en transmission, on constate donc une transition entre un régime initial pour lequel l'onde "voit" deux cristaux phononiques accolés, et un régime dans lequel la transmission est sensible à la présence de la cavité résonante.

### 4.2.1 Dimension de la cavité

La taille mesurable de la cavité est en soi un paramètre difficile à évaluer, puisque les cristaux phononiques n'ont pas de frontière clairement définie. Faut-il prendre en compte la distance centre à centre entre les rangées de tiges "internes" (soit 10,5 mm) ou bien faut-il choisir la distance bord à bord entre les deux échantillons (soit 9,7 mm) ? La différence entre les deux approches (le diamètre d'une tige) est de 0.8 mm, soit à peu près 8% de la taille de cavité.

L'analyse des signaux temporels peut nous aider à définir une taille de cavité. La durée entre deux maxima des paquets d'onde dans le signal temporel s'établit de manière stable à 16  $\mu\text{s}$  pour l'échantillon de deux fois trois rangées (échantillon que nous appelons **FP3**). Cette durée correspond, dans l'eau de la cavité, à un trajet aller-retour de 24 mm.

Cette donnée est à rapprocher d'une analyse fine des fréquences de résonance. Pour un Fabry-Pérot de haute réflectivité, la condition de résonance classique pour une onde plane de vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  s'écrit  $||\mathbf{k}|| \cdot d = n\pi$  avec  $n \in \mathbb{N}$ . Les fréquences de résonance  $\nu_n$  vérifient donc la relation :

$$\nu_n = n \frac{c}{2d} \quad \text{avec } c \text{ la vitesse du son dans l'eau et } d \text{ la taille de la cavité} \quad (4.1)$$

Les fréquences de résonance observées expérimentalement sont 408, 470 et 532 kHz. L'écart entre chacune de ces valeurs est constant, et vaut 62 kHz<sup>§</sup>. En injectant cette valeur de la séparation entre résonances dans la formule 4.1, nous déduisons la dimension  $d$  de la cavité : 12,1 mm.

Cette valeur rejoint celle obtenue en analysant les signaux temporels, mais elle est dans tous les cas très supérieure à la dimension physique de la cavité, quelle que soit le choix de frontière des cristaux. Cela vient du fait que la formule 4.1 n'est valable que pour des miroirs

<sup>§</sup>Nous avons pu vérifier expérimentalement que les résonances sont d'autant plus nombreuses dans la bande interdite que la distance entre les deux cristaux est importante.

hautement réfléchissant, ce qui n'est pas notre cas. Il est tout de même possible de conserver le modèle du Fabry-Pérot haute réflectivité en introduisant une longueur de pénétration de l'onde dans chacun des cristaux, en suivant l'approche de Temelkuran pour des cristaux photoniques métalliques [66]. Dans le cadre de ce modèle, les cristaux phononiques peuvent être remplacés par des miroirs parfaits situés en retrait de la cavité de quelques millimètres. La longueur de pénétration ainsi définie vaut alors 0,75 mm ou 1,15 mm selon la frontière que l'on choisit pour le cristal (respectivement centre ou bord de tige).

La question de la taille de la cavité résonante reste donc ouverte : physiquement, il est possible de mesurer une distance entre les cristaux, avec une incertitude liée à la définition du bord d'un cristal ; en revanche, les ondes perçoivent une cavité de taille supérieure à la stricte mesure de la distance entre les cristaux.

### 4.2.2 La question de l'absorption

Aux résonances, le facteur de transmission que l'on mesure expérimentalement n'est jamais unitaire, et l'on peut même constater sur la figure 4.3.b que l'amplitude de ces dernières diminue au fur et à mesure que l'on augmente l'épaisseur des cristaux délimitant la cavité.

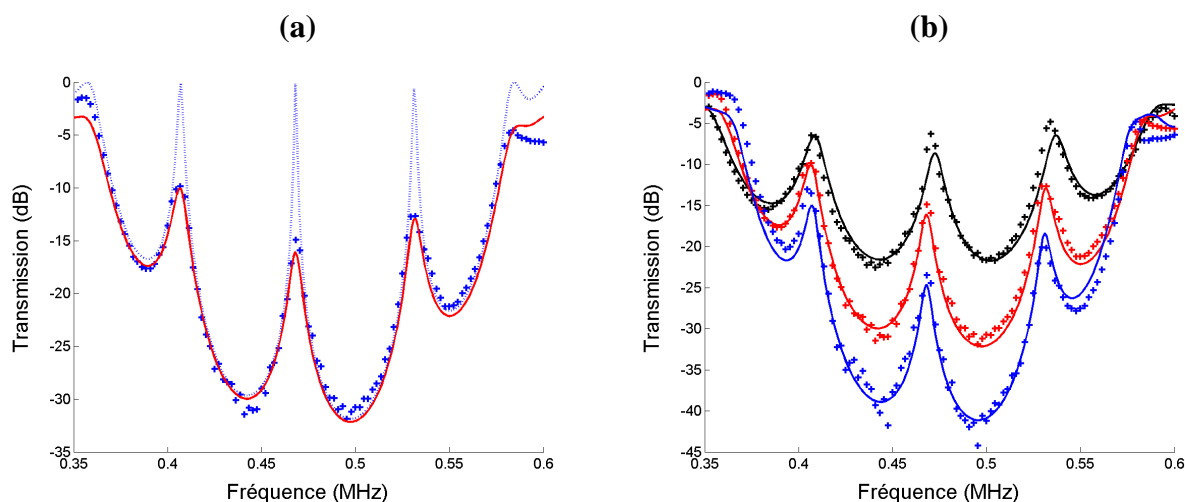


FIG. 4.3 – **Figure a** : facteur de transmission mesuré sur un échantillon Fabry-Pérot de deux fois 4 rangées **FP4** (croix bleues), calculé avec le modèle 1D prenant en compte l'absorption (trait continu rouge), calculé avec le modèle 1D sans absorption (pointillés bleus). **Figure b** : facteurs de transmission mesurés à travers les échantillons **FP3**, **FP4**, **FP5** [croix] et simulés avec le modèle 1D prenant en compte une absorption de  $0,011 \text{ mm}^{-1}$  [traits continus].

Pour expliquer ce phénomène, nous invoquons le modèle unidimensionnel précédemment utilisé pour modéliser la première bande interdite de cristaux simples (section 3.1). Nous introduisons de l'absorption dans l'eau de la cavité et entre les couches d'acier en ajoutant une petite partie complexe au vecteur  $\mathbf{k}$ .

Nous avons constaté que le modèle unidimensionnel présentait alors un excellent accord avec les données enregistrées à travers les différents échantillons. Les résonances sont d'amplitude unité quand l'absorption est nulle partout (figure 4.3.a), et diminuent au fur et à mesure que l'on augmente sa valeur. Alors que l'absorption ne joue que très modérément sur la transmission de cristaux simples, elle est ici cruciale pour expliquer la réduction du niveau des pics de résonance.

Les paramètres du modèle sont les mêmes que ceux utilisés pour les cristaux simples, à savoir une périodicité de 1.435 mm et une épaisseur des couches d'acier de 75  $\mu\text{m}$ . La cavité est modélisée par une couche d'eau épaisse de 10 mm, pour laquelle il est possible de modifier l'absorption spécifique au besoin. Cette dimension "optimale" de la cavité est intermédiaire entre 9,7 et 10,5 mm, mais nous devons nous souvenir que ces valeurs étaient fondées sur l'hypothèse d'un perçage régulier à 1,5 mm. Une cavité de 10 mm, qui correspond exactement à 7 périodes du cristal dans la simulation, tendrait à accréditer l'idée que la dimension physique de la cavité doit être mesurée centre à centre des tiges bordant la cavité.

Concernant l'absorption, le meilleur accord entre les expériences et le modèle unidimensionnel est obtenu quand on affecte une valeur commune de l'absorption à l'eau de la cavité et des cristaux et non à l'acier des diffuseurs.

Mais s'agit-il réellement d'absorption ? La valeur utilisée pour calculer les facteurs de transmission théoriques ( $0,011 \text{ mm}^{-1}$ ) est très supérieure à ce que l'on peut mesurer dans l'eau. A la fréquence de 1 MHz, la bibliographie spécifie plutôt une valeur de l'ordre de  $2 \cdot 10^{-5} \text{ mm}^{-1}$ , liée à la viscosité.

Pour comprendre l'origine de cette différence de 3 ordres de grandeur, il faut se souvenir que l'absorption atténue exponentiellement les signaux en rapport avec la distance parcourue. Rappelons-nous également que les signaux transmis ont dû être limités dans leur extension temporelle du fait d'un inévitable rebond entre le milieu et la source. En tronquant le signal temporel, nous avons donc artificiellement introduit une brutale réduction d'amplitude des ondes arrivant à un temps ultérieur.

La valeur de l'absorption que nous utilisons est donc une manière de prendre en compte la limitation temporelle imposée aux signaux. Nous verrons bientôt que nous serons en mesure de lever cette restriction dans l'étude du temps de groupe aux résonances.

### 4.3 Effet tunnel résonant

Nous avons vu que la structure Fabry-Pérot fabriquée en assemblant deux cristaux phononiques présentait des résonances en transmission, qui se traduisent dans le domaine temporel par l'apparition d'un battement de fréquences. L'étude dynamique de cette structure va nous permettre de mettre en évidence le phénomène de piégeage des ondes résonantes.

Ici encore, nous mettons à profit l'accès à la phase pour calculer le temps de groupe pour les fréquences de la bande passante. La procédure de calcul du temps de groupe que nous utilisons

ici est la même que celle déjà évoquée pour les cristaux phononique simples, et a été détaillée à la section 2.4. En revanche, la présence des résonances complique le choix de la largeur du filtre gaussien. Trop large, le filtre écrase les résonances ; trop étroit, il produit un temps de groupe bruité. L'optimum dans notre cas se situe pour une largeur de 3 kHz. De fait, le pas d'échantillonnage fréquentiel du temps de groupe est également de 3 kHz, de telle sorte que les gabarits des filtres gaussiens se croisent à mi-hauteur.

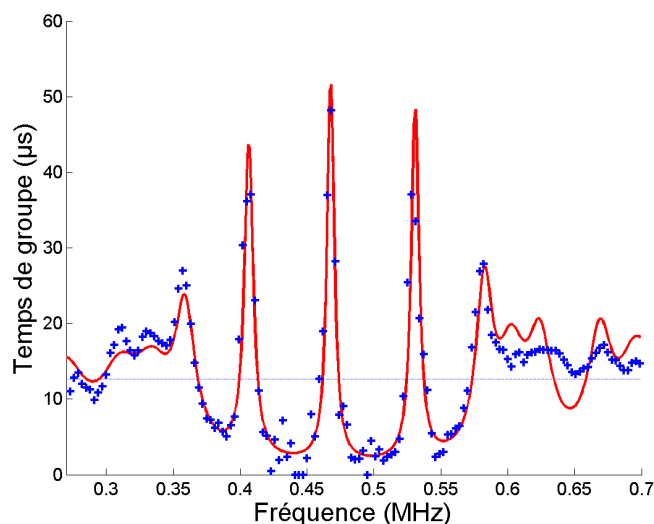


FIG. 4.4 – Temps de groupe mesuré sur l'échantillon **FP4** (croix bleues), ajusté par le modèle unidimensionnel avec absorption (trait continu rouge). Le temps de traversée d'une épaisseur d'eau similaire à celle de l'échantillon est représenté en trait bleu fin.

Aux résonances, on peut mesurer un temps de groupe allant jusqu'à cinq fois le temps de propagation dans une épaisseur similaire d'eau (figure 4.4). Dans la mesure où le temps de traversée de chacun des cristaux par effet tunnel est très faible, cela signifie que l'onde est piégée dans la cavité de la structure : on peut donc associer un long temps de vie à chaque résonance.

En revanche, en dehors des résonances, la vitesse de groupe est élevée, supérieure à la vitesse de propagation de l'onde dans une épaisseur similaire d'eau : on retrouve ici les caractéristiques dynamiques d'un cristal phononique simple (que nous avons étudiées au chapitre 2)

La différence de temps d'arrivée entre deux paquets d'onde de fréquences centrales proches est frappante : l'un voit son maximum arriver 25 fois plus tard que l'autre alors que seulement 25 kHz les séparent.

Nous avons par la suite étudié de manière systématique le temps de groupe pour des échantillons d'épaisseur croissante (deux fois deux, trois, quatre et cinq rangées de tiges – au-delà, la transmission devenant trop faible), comme en témoigne la figure 4.5.

Si les pics de résonance en transmission ont tendance à diminuer quand on ajoute des tiges à chacun des cristaux, le phénomène opposé se produit quand on s'intéresse au temps de groupe. Les temps de groupe mesurés aux résonances sont en effet de plus en plus élevés au fur et à mesure que l'on augmente l'épaisseur des cristaux phononiques délimitant la cavité.



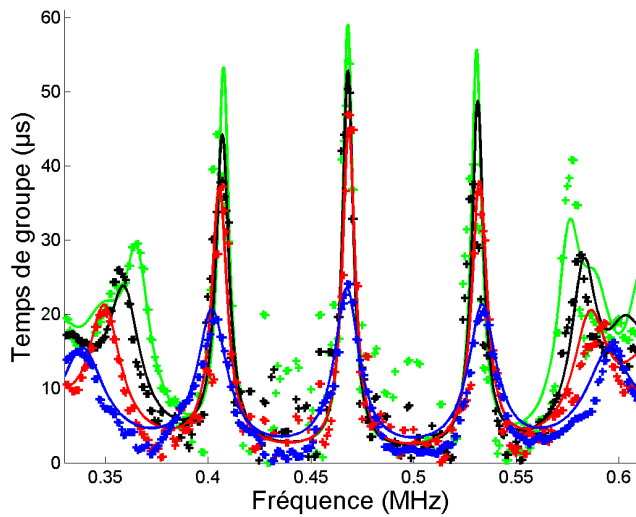


FIG. 4.5 – Temps de groupe mesurés sur les échantillons **FP2**, **FP3**, **FP4** et **FP5** (croix) et ajustés à l'aide du modèle 1D (traits continus).

Sur la base de cette observation, nous nous sommes demandés s'il était possible d'approfondir l'analogie avec le modèle quantique d'une double barrière de potentiel, et si l'on observait le même genre de phénomène dans le cas quantique.

### 4.3.1 Modèle quantique d'une double barrière de potentiel

Pour répondre à cette dernière question, nous développons ici quelques calculs menant à l'expression du temps de groupe d'un paquet d'onde électronique traversant la structure quantique décrite sur la figure 4.6.

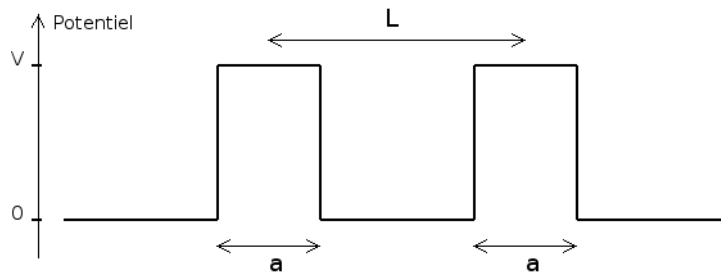


FIG. 4.6 – Double barrière de potentiel en mécanique quantique.

Pour atteindre cet objectif, il nous faut tout d'abord exprimer le facteur de transmission de la structure composée de deux barrières de potentiel.

Dans les zones de potentiel nul, la fonction d'onde est la somme de deux ondes planes contrapropagatives :

- à gauche de la première barrière,  $\Psi = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$ .

- entre les deux barrières,  $\Psi = Fe^{ikx} + Ge^{-ikx}$ .
- à droite de la deuxième barrière,  $\Psi = Ke^{ikx} + Le^{-ikx}$ .

Nous montrons en annexe C, que les coefficients [A,B] et [F,G] sont reliés par une matrice de transfert M. Il en est de même pour les coefficients [F,G] et [K,L], pourvu que l'on translate la relation de la distance L. On définit à cet effet un opérateur de translation T, de matrice de transfert

$$\begin{pmatrix} e^{ikL} & 0 \\ 0 & e^{-ikL} \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

On a donc

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

et

$$T \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix} = MT \begin{pmatrix} K \\ L \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

Or,  $L=0$  puisqu'il n'y a pas d'onde incidente depuis la droite. Les coefficients de transmission  $t$  et de réflexion  $r$  de la double barrière s'expriment donc par :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ r \end{pmatrix} = MT^{-1}MT \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

On obtient après quelques calculs le coefficient de transmission en amplitude :

$$t = \frac{e^{-2ika}}{1 + sh^2(\kappa a)(1 - \varepsilon^2/4) + i\varepsilon ch(\kappa a)sh(\kappa a) + sh^2(\kappa a)(1 + \varepsilon^2/4)e^{2ik(L-a)}} \quad (4.6)$$

Quand l'énergie  $E$  de l'onde incidente approche celle d'un niveau quantique entre les deux barrières, la condition de transmission résonante est remplie et la transmission approche l'unité.

Pour des barrières de potentiel opaques, c'est-à-dire telles que  $\kappa a \gg 1$ , le coefficient de transmission présente des maxima quand

$$e^{2ik(L-a)} = -\frac{[(1 - \varepsilon^2/4) + i\varepsilon]}{[1 + \varepsilon^2/4]} \quad (4.7)$$

Cela nous permet d'obtenir la condition de résonance<sup>¶</sup> (avec  $d=L-a$  et  $\delta[|\varepsilon| < 2] = 1$  si  $|\varepsilon| < 2$ , 0 sinon) :

$$kd = \left( n + \frac{\delta[|\varepsilon| < 2]}{2} \right) \pi + \frac{1}{2} \tan^{-1} \left[ \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon^2/4} \right] \quad (4.8)$$

Pour simplifier les calculs suivants, on se place dans le cas où  $\varepsilon = 0$ , ie  $\kappa = k$ . De plus, on

---

<sup>¶</sup>Quand l'énergie de l'onde incidente correspond à la hauteur médiane des barrières de potentiel,  $k = \kappa$ ,  $\varepsilon = 0$  et cette condition devient  $d = n\lambda/2 + \lambda/4$ , qui ressemble à la condition de résonance classique de type Fabry-Pérot, mis à part le  $\lambda/4$  qui vient de la profondeur de pénétration des ondes dans les barrières. Quand les barrières de potentiel sont infiniment hautes (=impénétrables),  $\varepsilon \rightarrow +\infty$  et on retrouve la condition classique  $kd = n\pi$  (l'inconvénient étant alors que l'on ne peut plus injecter d'énergie dans le système).

suppose  $\kappa a \gg 1$ . Alors :

$$t = \frac{e^{-2ika}}{1 + sh^2(\kappa a)(1 + e^{2ikd})} \approx \frac{e^{-2ika}}{1 + e^{(2\kappa a)}(1 + e^{2ikd})/4} \quad (4.9)$$

On cherche à développer 4.9 autour de la résonance. On pose donc  $k = k^* + \Delta k$ , où  $k^*$  correspond au vecteur d'onde résonant. On obtient alors :

$$t = \frac{e^{-2ika}}{1 + e^{(2\kappa a)}[1 + e^{2ik^*d}(1 + 2i\Delta k d)]/4} \quad (4.10)$$

Or,  $e^{2ik^*d} = -1$ , ce qui nous permet de calculer la transmission autour de la résonance :

$$T = |t|^2 = \frac{1}{1 + (\Delta k e^{(2\kappa a)} d/2)^2} \quad (4.11)$$

De cette expression, on extrait le facteur de qualité  $Q$  de la résonance, qui est relié à l'inverse de la largeur  $\Delta k$  de la résonance. Celui-ci s'accroît exponentiellement avec la largeur des barrières, puisque

$$\Delta k \approx \frac{2}{d} e^{-2\kappa a} \quad (4.12)$$

De fait, on prédit l'évolution du temps de groupe à la résonance en fonction de l'épaisseur des barrières de potentiel :

$$t_g = \frac{d\phi}{d\omega} = \frac{1}{v_g} \frac{d\phi}{dk} \approx \frac{d}{2v_g} e^{2\kappa a} \quad (4.13)$$

En mécanique quantique, le temps de transit à la résonance à travers une double barrière de potentiel ( $t_g$ ) est donc inversement proportionnel à la probabilité de traverser une barrière unique par effet tunnel ( $e^{-2\kappa a}$ ) et devient exponentiellement grand par rapport au temps de traversée de la cavité ( $d/v_g$ ) quand l'épaisseur des barrières de potentiel s'accroît.

### 4.3.2 Temps de groupe aux résonances du Fabry-Pérot acoustique

Dans le cadre de nos expériences avec des cristaux phononiques bidimensionnels, nous ne retrouvons pas la dépendance exponentielle du temps de groupe qui est prévue dans le cadre du modèle quantique. Sur la figure 4.5, nous constatons en effet que les temps de groupe mesurés aux pics de résonance ne s'accroissent pas exponentiellement avec le nombre de rangées de tiges.

Il semblerait que cette saturation soit en partie due à la limitation imposée aux signaux temporels, que nous modélisons comme de l'absorption<sup>||</sup>. Le modèle unidimensionnel permet de rendre compte de cet artefact, puisque l'on peut reproduire la hauteur des pics de résonance avec une valeur unifiée de l'absorption ( $0,011 \text{ mm}^{-1}$ ) pour les quatre échantillons dont on représente le temps de groupe sur la figure 4.5.

<sup>||</sup>Cette raison n'est pas la seule, même si nous sommes longtemps restés convaincus qu'il s'agissait de la principale.

Non satisfaits de ce genre de résultat qui ne nous permettait pas d'obtenir une valeur de l'absorption réellement caractéristique de nos échantillons, nous avons cherché un moyen pour nous affranchir de la limitation temporelle.

La technique que nous avons mis au point repose sur l'utilisation du modèle unidimensionnel pour déterminer empiriquement l'évolution du temps de groupe aux résonances en fonction de la taille de la fenêtre temporelle limitant le signal.

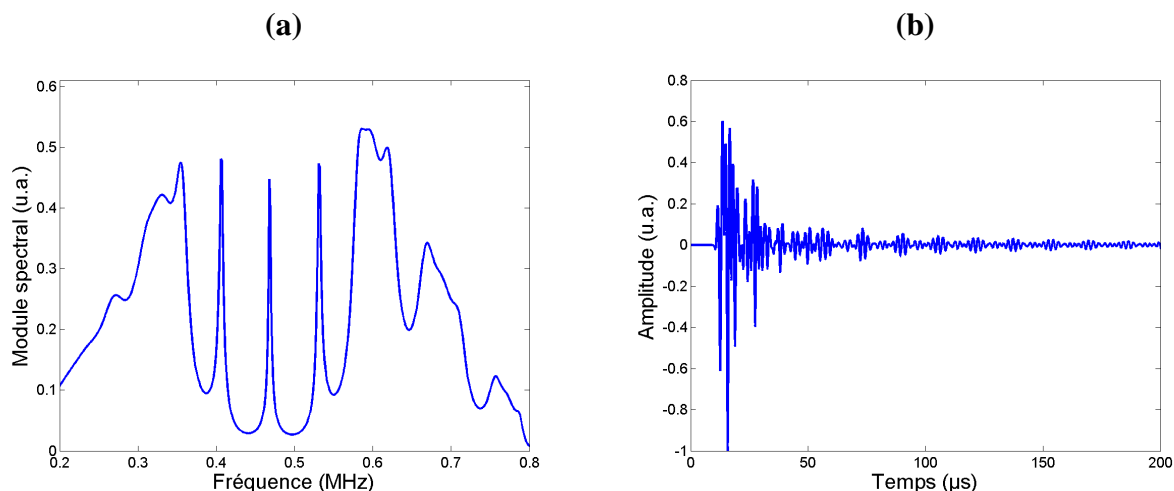
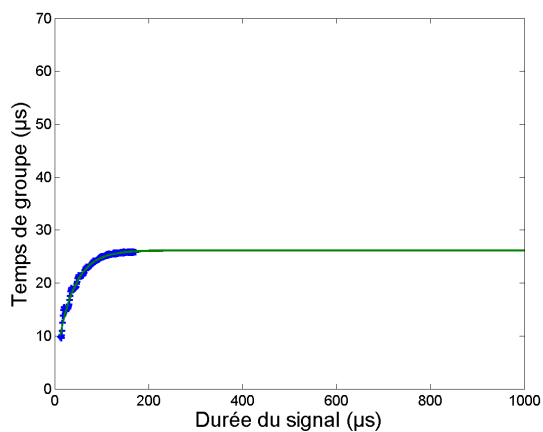


FIG. 4.7 – **Figure a** : Spectre recréé en appliquant un filtre gaussien au facteur de transmission calculé par le modèle 1D. **Figure b** : signal temporel synthétisé par transformée de Fourier inverse.

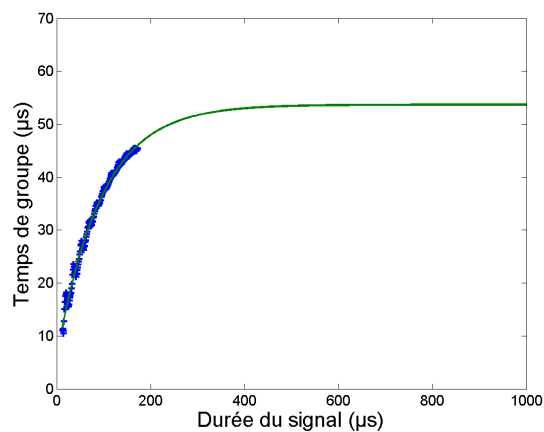
Des différents modèles dont nous disposons, le modèle unidimensionnel s'avère en effet être le meilleur candidat pour calculer rapidement la transmission théorique à travers une structure de type Fabry-Pérot. En appliquant un filtrage gaussien au facteur complexe de transmission de manière à reproduire la bande passante d'un transducteur, puis en revenant dans le domaine temporel par transformée de Fourier inverse, il a été possible de simuler la réponse impulsionnelle en transmission idéale (figure 4.7.b). C'est à partir d'un tel signal non limité temporellement que nous avons pu déterminer le comportement du temps de groupe aux résonances.

En calculant le temps de groupe  $Tg$  sur des fenêtres temporelles croissantes (de longueur  $T$ ), nous avons constaté que celui-ci obéissait à la loi empirique  $Tg = Tg_{max} - C * \exp(-T/\tau)$ , avec  $C \approx Tg_{max}$  et  $\tau$  la constante de temps caractéristique. Cette formule est intéressante car elle nous laisse entrevoir la possibilité de déterminer le temps de groupe à saturation en ajustant l'évolution du temps de groupe mesuré expérimentalement en fonction de fenêtres temporelles croissantes (figure 4.8).

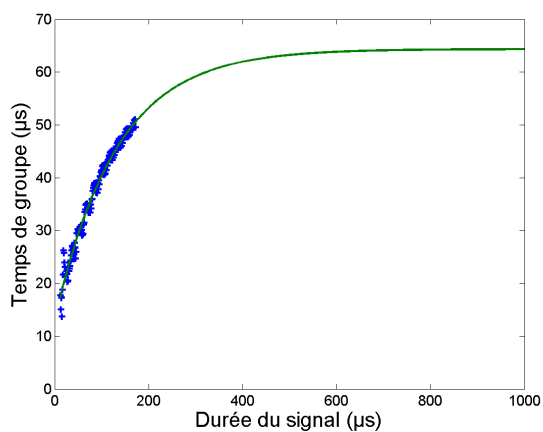
Sur cette figure, nous n'avons pas représenté l'évolution du temps de groupe pour l'échantillon FP1, puisque ce dernier était déjà saturé à  $160 \mu s$ . Il faut d'ailleurs constater que plus l'échantillon contient de tiges, plus la saturation du temps de groupe intervient tardivement. Cela est en accord avec l'image d'une cavité munie de miroirs de forte réflectivité, dans la-



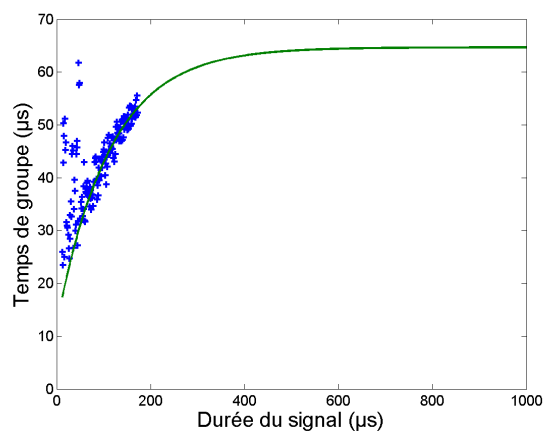
(FP2)



(FP3)



(FP4)



(FP5)

FIG. 4.8 – Evolution du temps de groupe à la résonance en fonction de la longueur temporelle de la fenêtre d'acquisition. Le temps zéro est défini par le début du signal. Les croix bleues sont les points expérimentaux ; le meilleur ajustement à la formule empirique est représenté en trait continu vert.

quelle l'onde séjourne plus longtemps.

Nous résumons les valeurs obtenues expérimentalement pour le temps de groupe mesuré avec une fenêtre temporelle de  $160\ \mu\text{s}$  sur les différents échantillons ainsi que les valeurs saturées correspondantes (c'est-à-dire le temps de groupe à  $1\ \text{ms}$ ) dans le tableau qui suit :

nombre de rangées	temps de groupe à $160\ \mu\text{s}$	temps de groupe saturé
1	$12.9\ \mu\text{s}$	$12.9\ \mu\text{s}$
2	$25.8\ \mu\text{s}$	$26.2\ \mu\text{s}$
3	$46.7\ \mu\text{s}$	$53.7\ \mu\text{s}$
4	$52.1\ \mu\text{s}$	$64.3\ \mu\text{s}$
5	$54.3\ \mu\text{s}$	$64.7\ \mu\text{s}$

Le résultat de ces manipulations est décevant : nous pensions nous être affranchis de la principale cause d'absorption, mais ce n'est pas le cas. En l'absence de correction du temps de groupe, la valeur de l'absorption était de  $11.10^{-3}\ \text{mm}^{-1}$ . La figure 4.9 sur laquelle nous représentons l'évolution du temps de groupe saturé en fonction de l'épaisseur des cristaux (points bleus) révèle une absorption résiduelle de  $8.10^{-3}\ \text{mm}^{-1}$ .

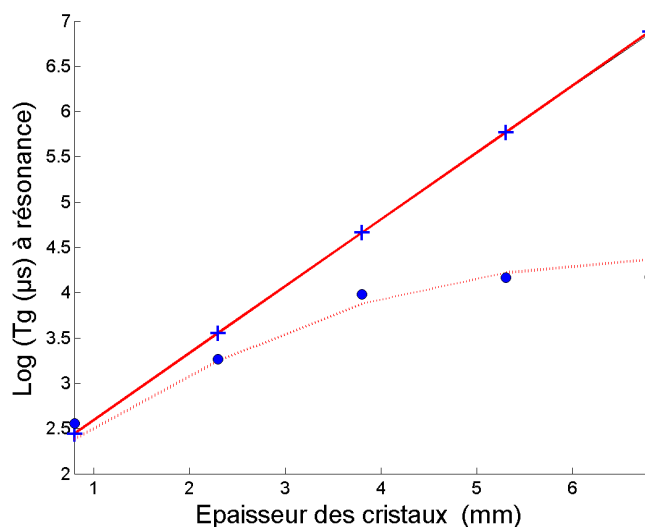


FIG. 4.9 – Evolution du temps de groupe à la résonance centrale (468 kHz) en fonction de l'épaisseur des cristaux. Les résultats expérimentaux corrigés du temps de troncature (cercles bleus) sont comparés au modèle 1D avec une absorption de  $8.10^{-3}\ \text{mm}^{-1}$  (pointillés rouges), sans absorption (croix bleues) et avec la prédiction théorique en  $\exp(2\kappa a)$  (ligne continue rouge), avec  $\kappa = 0.37\ \text{mm}^{-1}$  (valeur mesurée avec la décroissance exponentielle de la transmission sur un cristal simple à 468 kHz – cf. figure 2.5).

Le meilleur ajustement des résultats expérimentaux corrigés de l'artefact "temps de troncature" avec le modèle unidimensionnel est donc obtenu pour une valeur de l'absorption de  $8.10^{-3}\ \text{mm}^{-1}$ . Cette valeur est encore très éloignée de l'absorption intrinsèque du milieu de propagation. On peut donc supposer que d'autres facteurs entrent en jeu pour expliquer cette valeur plutôt élevée de l'absorption. Parallélisme imparfait de la cavité et diffraction dans la troisième direction sont des causes probables de perte de facteur de qualité des résonances, et restent à comprendre.

## 4.4 Modes de résonance de la cavité

En introduisant ce chapitre, nous avons mentionné la capacité d'un assemblage de deux cristaux phononiques à transmettre une fréquence incidente résonante sans perte, alors que celle-ci serait fortement atténuée par un cristal unique. En mettant à profit les simulations que nous avons développées au chapitre 3, nous illustrons le fait que cette transmission renforcée de certaines fréquences peut s'expliquer par la présence de fortes amplitudes acoustiques au sein même de la cavité.

Le code self-consistant est particulièrement adapté à ce cas de figure, puisqu'il nous permet de calculer en tout point de l'espace l'amplitude complexe du champ ultrasonore à une fréquence. Les figures 4.10 représentent le module de la pression acoustique dans une région de l'espace autour de la cavité d'un Fabry-Pérot, pour deux fréquences différentes. La source ponctuelle est placée en champ lointain à gauche de la structure, de manière à illuminer l'échantillon avec une onde plane. La première figure correspond à une fréquence interdite de la structure ; la deuxième à une fréquence résonante. Dans le premier cas, nous pouvons constater que l'amplitude maximale se trouve en dehors de la cavité, du côté de la source, et que peu d'énergie est mesurée en sortie du dispositif. Dans le second cas, l'amplitude moyenne au sein de la cavité est supérieure à celle de l'onde incidente et sa valeur est multipliée par 25 par rapport à une fréquence non résonante.

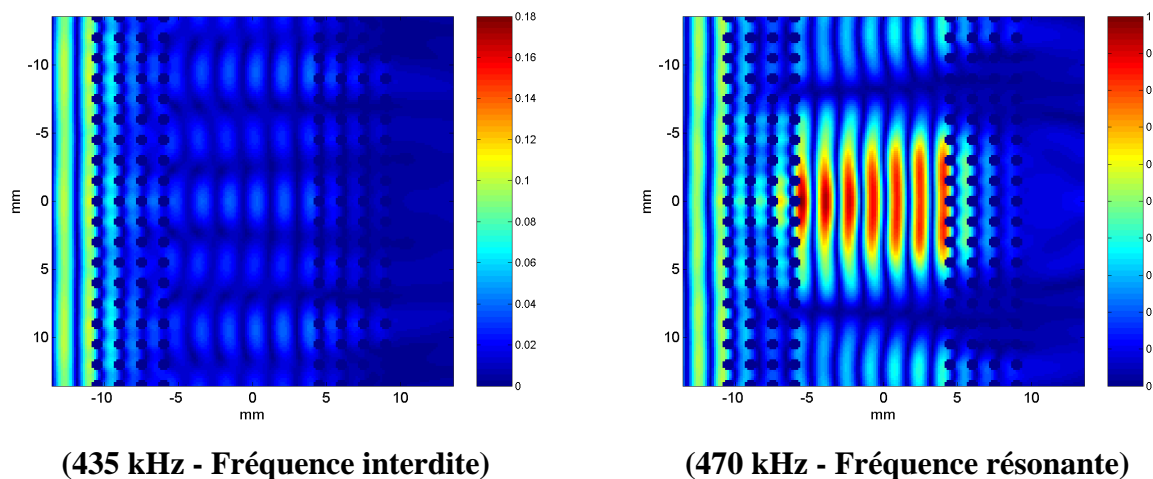


FIG. 4.10 – Champ de pression calculé à l'aide du code self-consistant dans une structure de type Fabry-Pérot constituée de 2 cristaux de 4 rangées de tiges, illuminée en champ lointain par une source ponctuelle. L'amplitude est normalisée par son maximum sur la surface considérée à la fréquence résonante. **A gauche**, l'onde incidente correspond à une fréquence interdite (435 kHz) ; **à droite**, il s'agit d'une fréquence de résonance de la structure (470 kHz).

Le modèle unidimensionnel nous permet également de calculer le champ de pression au sein de la cavité, et confirme la présence de surintensités aux fréquences résonantes.

Au centre de la structure éclairée par une onde plane monochromatique, l'amplitude complexe du signal s'écrit  $A_{(n+1)/2}e^{ik_{cav}L/2} + B_{(n+1)/2}e^{-ik_{cav}L/2}$ , avec  $L$  la dimension de la structure, et en conservant les notations introduites dans la section 3.1.

La figure 4.11 présente le résultat de ce calcul, dans lequel on a utilisé une valeur de l'absorption intrinsèque proche de celle qui caractérise nos réalisations expérimentales ( $8 \text{ m}^{-1}$ ). La suppression dans la cavité aux résonances peut alors atteindre 12 dB par rapport à la transmission à la même fréquence. Or 12 dB est une valeur qui correspond approximativement à l'atténuation d'un cristal simple de 4 rangées de tiges (cf. figure 2.4). La présence de la cavité résonante permet donc à certaines fréquences d'être amplifiées en son sein, ce qui compense l'atténuation à la traversée du deuxième cristal, et autorise une transmission unité.

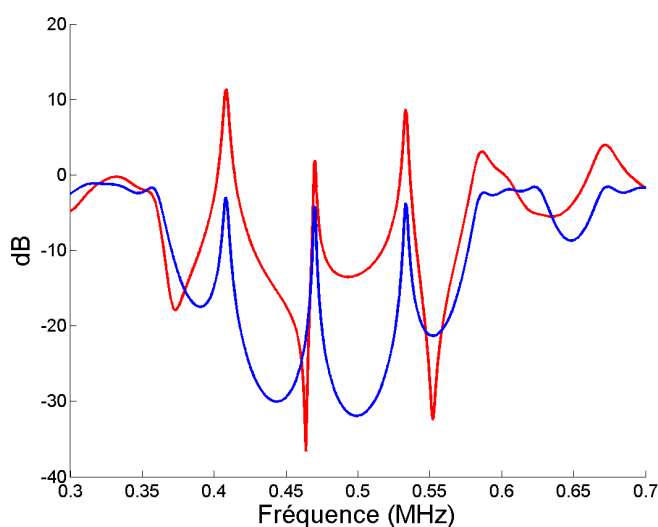


FIG. 4.11 – Module du champ de pression calculé à l'aide du modèle unidimensionnel au centre d'une cavité formée de 2 cristaux de 4 rangées de tiges séparés de 10 mm (trait continu rouge). Le facteur de transmission est représenté en trait continu bleu.

Jusqu'ici, nous avons considéré la cavité comme un dispositif passif soumis à une illumination ultrasonore depuis l'extérieur. Que se passerait-il si la source se trouvait désormais au sein de la cavité ? Il y a alors plusieurs régimes à explorer selon la nature de l'émission : de courte durée ou continue, auquel cas la fréquence d'émission peut correspondre à une résonance de la structure, ou bien à une fréquence interdite de la cavité. Là encore, les simulations seront utiles, puisque nous n'avons pu mener ce genre d'expérience.

Pour étudier le régime monochromatique, le code self-consistant de diffusion multiple est idéal, puisque le calcul est réalisé directement dans l'espace des fréquences. Si l'on place une source monochromatique au centre de la cavité, on peut observer deux comportements distincts selon la fréquence de la source (figure 4.12). Quand la source émet à une fréquence interdite de la structure, l'énergie reste essentiellement confinée autour de la source, sauf peut-être dans la direction  $\Gamma M$  de chacun des cristaux, où il n'existe ni condition de résonance ni bande interdite aux fréquences étudiées (cf. figure 3.5 : les cristaux étudiés ne présentent pas de bande interdite totale). En revanche, lorsque la fréquence de la source correspond à une résonance de la structure, un système d'ondes stationnaires s'établit dans la cavité et de l'énergie est rayonnée



en dehors de la structure.

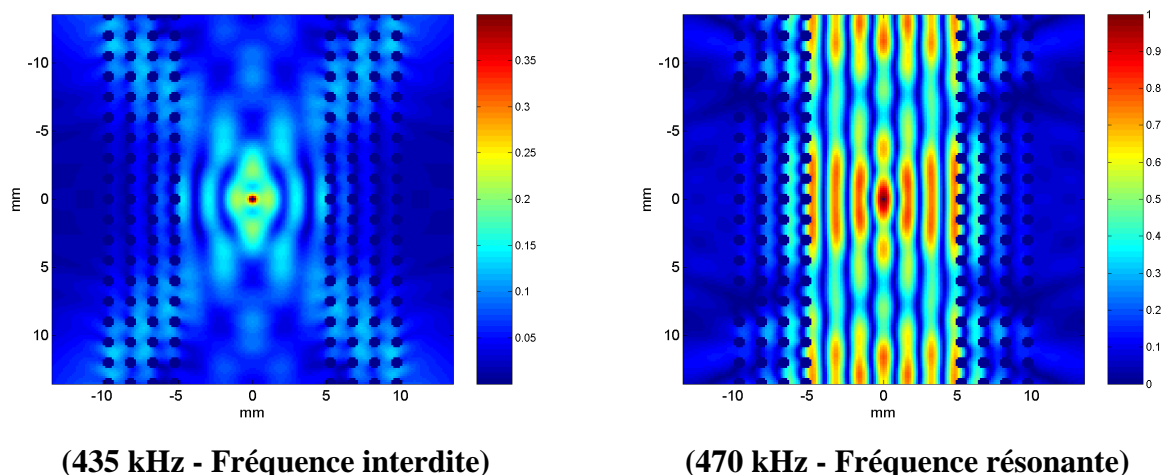


FIG. 4.12 – Champ de pression calculé à l’aide du code self-consistant dans une structure de type Fabry-Pérot constituée de 2 cristaux de 4 rangées de tiges, la source se trouvant au centre de la cavité. L’amplitude est normalisée par son maximum sur la surface considérée à la fréquence résonante. **A gauche**, la source émet à une fréquence interdite (435 kHz) ; **à droite**, la fréquence correspond à une résonance de la structure (470 kHz).

Cette expérience est à mettre en rapport avec l’idée initiale de S. John et E. Yablonovitch qui souhaitaient empêcher l’émission radiative d’atomes excités en les plaçant dans une structure périodique. En cela, cette simulation se rapproche également du travail de Asatryan [67] qui a étudié la densité locale d’états (LDOS) dans un cristal photonique par une méthode self-consistante similaire à la nôtre. La densité locale d’états étant liée à la partie imaginaire de la fonction de Green mesurée au point source, il démontre que ses valeurs sont très faibles au sein d’un cristal dans la bande interdite. Il en est de même au sein de la cavité Fabry-Pérot pour les fréquences non résonantes.

Pour étudier le régime impulsionnel, nous faisons appel à la simulation aux différences finies, dans laquelle une ligne de sources est disposée au milieu de la cavité, de manière à émettre une onde plane (figure 4.13). Une collection discrète de récepteurs est placée d’un côté de la structure. L’extension spatiale de la ligne de sources et des récepteurs est supérieure à celle du cristal, de telle sorte que l’on enregistre simultanément le champ dans l’eau et celui issu de la cavité.

Nous reproduisons sur la figure 4.14 les signaux enregistrés sur l’ensemble des points de contrôle du champ. L’onde plane initiale de courte durée ( $15 \mu s$ ) est visible sur les capteurs situés à la périphérie. La transformée de Fourier de ces signaux (figure 4.15) montre un étonnant phénomène de filtrage résonant : les capteurs centraux de la simulation enregistrent un signal quasi-monochromatique (figure 4.16), dont l’amplitude de la composante spectrale résonante est supérieure à celle de l’impulsion qui lui a donné naissance (figure 4.17).

## Récepteurs

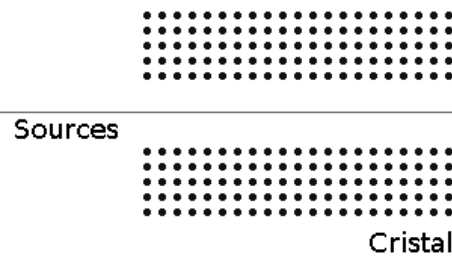


FIG. 4.13 – Éléments de la simulation en différences finies (plan source au sein de la cavité, Fabry-Pérot à cristaux phononiques, points de contrôle du champ).

Cette expérience intéressante n'est cependant que théorique, et sa mise au point expérimentale serait probablement difficile à mettre en oeuvre. La source doit en effet être bidirectionnelle et transparente aux ultrasons, de manière à autoriser les réflexions multiples internes à la structure. Il faut de plus noter que la simulation ne tient pas compte de l'absorption que nous avons expérimentalement mise en évidence.

Dans ce chapitre, nous avons étudié les propriétés stationnaires et dynamiques d'une structure de type Fabry-Pérot acoustique, dans laquelle les miroirs sont constitués de cristaux phononiques.

Nous avons mis en évidence le phénomène de transmission résonante dans une telle structure, qui se traduit par la présence de fortes amplitudes acoustiques au sein de la cavité. Celles-ci autorisent une transmission proche de l'unité aux fréquences pour lesquelles la cavité est susceptible d'entrer en résonance.

Nous avons également démontré l'existence d'un effet analogue à l'effet tunnel résonant de la mécanique quantique. Celui-ci se traduit par l'augmentation exponentielle du temps de groupe aux résonances. En acoustique, la dépendance exponentielle est difficile à mettre en évidence, non seulement à cause de l'inévitable limitation du temps d'acquisition, mais aussi du fait de phénomènes d'absorption dont nous n'avons pas été en mesure de déterminer clairement l'origine. Il faut enfin noter que l'absorption résiduelle dont nous avons obtenu une estimation n'a pas de contrepartie dans le monde quantique.

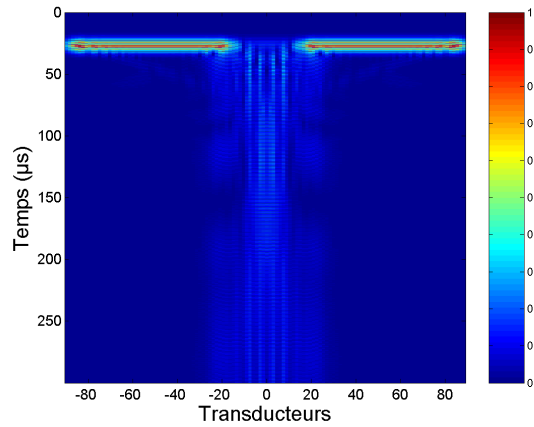


FIG. 4.14 – B-scan représentant les signaux temporels mesurés sur les récepteurs.

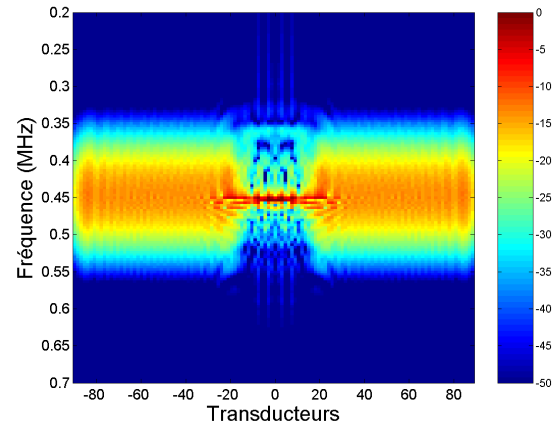


FIG. 4.15 – Spectre des signaux mesurés sur tous les récepteurs.

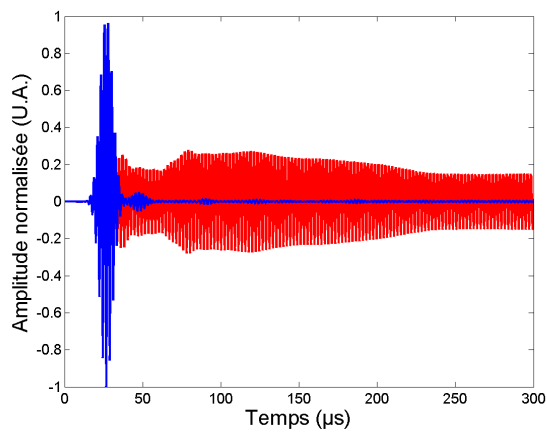


FIG. 4.16 – Signal temporel dans l'eau (bleu), signal enregistré en sortie de la cavité sur le récepteur central (rouge).

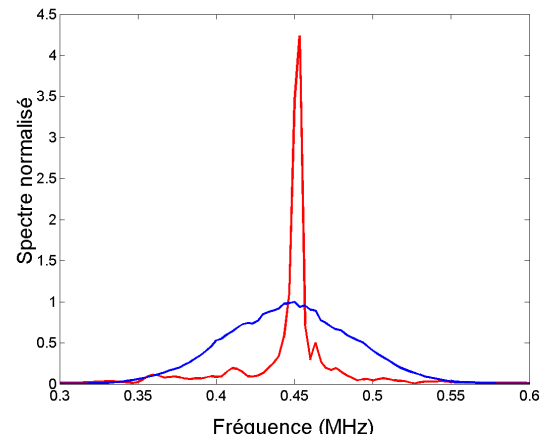


FIG. 4.17 – Spectre du signal dans l'eau (bleu), et spectre du signal enregistré en sortie de la cavité sur le récepteur central (rouge).

# Chapitre 5

## Retournement temporel et cristaux phononiques

### 5.1 Présentation du retournement temporel

Le retournement temporel est un sujet qui intéresse bon nombre de physiciens. Dans le domaine des ultrasons, une expérience de retournement temporel est devenue réalisable à partir du moment où les progrès de la technologie ont permis d'échantillonner spatialement et temporellement un champ ondulatoire avec une précision suffisante [68].

Les premières expériences de retournement temporel ont vu le jour dans le domaine de l'acoustique au début des années 1990 [69]. Très vite, les fondements théoriques ont été posés [70], et des applications originales telles que l'imagerie médicale (lithotripsie, hyperthermie du cerveau) et le contrôle non-destructif ont été imaginées.

Actuellement, l'application du retournement temporel aux télécommunications sans fil est à l'étude, et devrait constituer à l'avenir un moyen de communiquer de l'information de manière discrète en optimisant l'utilisation de la bande de fréquence disponible [71].

#### 5.1.1 Le retournement temporel en acoustique

La propagation d'une onde acoustique en milieu non dissipatif est gouvernée par l'équation :

$$\rho(\mathbf{r})\nabla\cdot\left(\frac{\nabla p(\mathbf{r},t)}{\rho(\mathbf{r})}\right)=\frac{1}{c^2(\mathbf{r})}\frac{\partial^2 p(\mathbf{r},t)}{\partial t^2} \quad (5.1)$$

où  $p(\mathbf{r},t)$  est la pression au point  $\mathbf{r}$  et au temps  $t$ .

Cette équation présente la particularité d'être invariante par retournement du temps. En effet, pour toute solution  $p(\mathbf{r},t)$  de l'équation ci-dessus,  $p(\mathbf{r},-t)$  l'est également. Sous condition de **réversibilité du milieu de propagation**, il est donc possible en théorie de refaire converger une onde à sa source. En acoustique, la réversibilité du milieu de propagation est assurée en l'absence de dissipation quand le milieu est spatialement réciproque \*.

---

\*La réciprocité spatiale n'est pas acquise pour tout milieu de propagation, notamment lorsque celui-ci est animé

Le retournement temporel des ondes acoustiques se déroule classiquement en deux étapes. Dans un premier temps, que nous qualifions de "**phase d'apprentissage**", une source émet un signal bref, qui se propage jusqu'à une collection de récepteurs. Le champ de pression est enregistré et numérisé en chacun de ces transducteurs sur une durée très grande, jusqu'à disparition totale du signal.

Dans un deuxième temps, les mémoires électroniques sont relues à l'envers, et le signal temporel synthétisé est émis par les mêmes transducteurs ayant servi à l'acquisition. Ceci constitue la "**phase de ré-émission**". Un signal de durée proche de celle du signal initial est alors recréé localement autour de la source, pour peu que le milieu de propagation soit invariant par renversement du temps.

Dans une opération de retournement temporel idéal, le champ ainsi que sa dérivée normale doivent être enregistrés sur une surface entourant la source, que l'on appelle dès lors "**cavité à retournement temporel**". Cette notion, ainsi que le formalisme qui en découle, ont été développés au laboratoire par D. Cassereau et M. Fink [70].

La possibilité de retourner le champ depuis une surface de contrôle repose sur la formulation intégrale de la propagation des ondes : au lieu de devoir imposer des conditions initiales dans tout le volume pour engendrer la solution retournée temporellement, il suffit d'émettre le champ depuis la surface qui entoure le volume considéré.

De plus, il a été montré qu'il n'était pas nécessaire d'échantillonner le signal en tout point de la cavité : il suffit de disposer les récepteurs à la distance  $\lambda/2$  les uns des autres, puisque l'échelle spatiale de variation d'un champ est limitée à sa plus petite longueur d'onde. Cela correspond également au fait que les détails de la source, portés par les ondes évanescentes, ont été perdus au cours de la propagation jusqu'à la surface de la cavité.

Il faut tout d'abord noter qu'une telle expérience de renversement du temps n'est technologiquement pas réalisable avec des particules. Toute erreur sur les paramètres initiaux, tels que vitesse et position des particules, s'amplifierait exponentiellement et conduirait à l'échec de l'expérience [72]. Cette divergence des trajectoires dans la phase de retournement temporel est caractéristique du chaos classique, qui se manifeste par la très forte sensibilité de la mécanique aux conditions initiales.

En revanche, on constate expérimentalement que cette opération menée dans le cadre de la physique ondulatoire est extrêmement robuste aux diverses erreurs et approximations qui se cumulent inévitablement dans la chaîne de traitement de l'information [73].

La première limite vient du fait que nous ne disposons pas d'une cavité à retournement temporel complète. En effet, la réalisation d'une cavité s'avère extrêmement coûteuse dans la pratique ; c'est pourquoi la plupart des expériences de retournement temporel n'utilisent qu'une portion de cavité, que l'on appelle dès lors "**miroir à retournement temporel**" (MRT). De

---

d'un mouvement propre : la présence d'un vortex dans un écoulement brise la réciprocity du milieu pour les ondes acoustiques

telles collections de transducteurs ultrasonores sont disponibles commercialement en vue d'applications médicales : ce sont les classiques barrettes échographiques qui peuvent comporter entre 32 et 256 éléments actifs.

En dépit de cette limitation, la focalisation spatio-temporelle persiste, mais elle est alors limitée par la diffraction à cause de l'ouverture apparente du miroir. En milieu homogène, un miroir à retournement temporel de largeur  $D$  générera donc une tache focale dont la largeur à mi-hauteur sera de l'ordre de  $\lambda f/D$ , où  $f$  est la distance de la source au miroir. La longueur temporelle de l'impulsion recréée au point source est quant à elle limitée par l'autocorrélation des réponses impulsionnelles des transducteurs [74].

La deuxième approximation concerne l'échantillonnage temporel des signaux acoustiques. Le retournement temporel n'est pas contraignant sur ce point, puisqu'il suffit d'échantillonner les signaux à  $T/8$  (où  $T$  est la période correspondant à la fréquence centrale de l'impulsion) pour ne pas dégrader significativement la focalisation spatiale [68].

En outre, une quantification sur 1 bit du champ retourné temporellement ne modifie pas les résolutions spatiales et temporelles dans les milieux complexes [75, 76]. Il a d'ailleurs été montré que le rapport signal sur bruit en était significativement amélioré. Là encore, des applications dans le domaine médical ont été conçues [77].

### 5.1.2 Dispositif expérimental et formalisme de la réponse impulsionnelle

Un dispositif expérimental classique d'une expérience de retournement temporel en transmission est le suivant : deux barrettes de transducteurs (**A** et **B**) sont disposées à une dizaine de centimètres de part et d'autre du milieu d'étude, l'ensemble étant immergé dans l'eau (figure 5.1). Une voie centrale de la barrette **A** émet un signal acoustique bref, dont on enregistre la transmission sur les transducteurs de la barrette **B**. Les signaux sont retournés temporellement puis ré-émis par ces mêmes transducteurs qui jouent désormais le rôle d'émetteurs. Sous réserve d'invariance du milieu par retournement du temps, l'onde revit son parcours en sens inverse, et converge vers le point d'émission initial. On enregistre alors sur la barrette **A** une collection de signaux, qui permettent de construire une image au format B-scan de la focalisation spatio-temporelle. On appelle "**compression temporelle**" le signal temporel recréé à la source et "**focalisation spatiale**" l'amplitude mesurée au temps de refocalisation en chacun des transducteurs autour du point focal.

Quand on ne dispose pas d'une électronique multivoie permettant de gérer simultanément le retournement temporel d'un grand nombre de voies, ou bien quand on souhaite se passer de cette électronique pour diverses raisons, il est possible de simuler partiellement l'opération de retournement temporel.

A cet effet, nous introduisons le formalisme de la réponse impulsionnelle, qui permet de calculer la compression temporelle ainsi que la focalisation spatiale à partir des réponses impulsionnelles inter-éléments  $h_{ij}(t)$  (dont l'ensemble constitue la **matrice de propagation**  $H$  entre les deux barrettes).

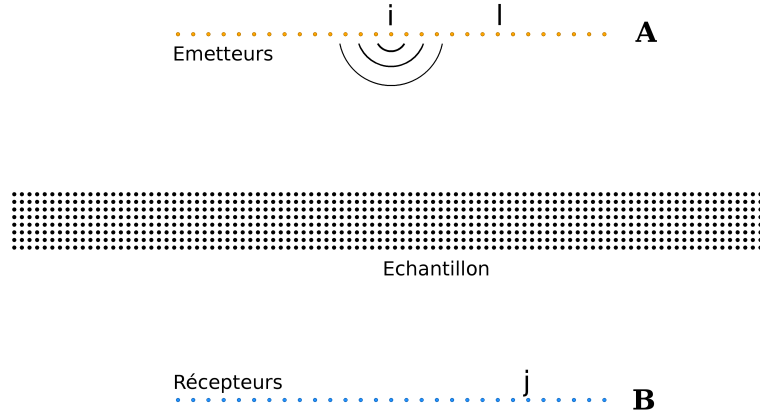


FIG. 5.1 – Dispositif expérimental classique, dans lequel  $i$  est la source initiale ;  $l$  et  $j$  sont des positions quelconques de transducteurs sur les barrettes **A** et **B**.

Supposons que la source initiale soit le transducteur  $i$ . Connaissant la matrice de propagation  $H$ , nous souhaitons reconstruire *a posteriori* le signal qui serait recréé par retournement temporel sur une barrette virtuelle de transducteurs **A**, en utilisant le miroir à retournement temporel virtuel **B**.

Le signal  $S_{il}(t)$  reconstruit par retournement temporel en un point  $l$  quelconque de la barrette virtuelle **A** s'écrit alors :

$$S_{il}(t) = \sum_j h_{ij}(T - t) \otimes h_{jl}(t) \quad (5.2)$$

où  $T$  est le délai nécessaire à l'opération de retournement temporel, *a priori* supérieur au temps d'extinction des signaux transmis<sup>†</sup>. L'introduction de ce temps  $T$  est nécessaire pour préserver la causalité de l'expérience, mais il est parfois négligé pour alléger les expressions.

Par réciprocité du milieu de propagation, on peut souvent écrire  $h_{jl}(t) = h_{lj}(t)$ . Le signal reconstruit sur la barrette **A** devient alors exprimable à partir de la matrice de propagation enregistrée préalablement :

$$S_{il}(t) = \sum_j h_{ij}(T - t) \otimes h_{lj}(t) \quad (5.3)$$

Dans le domaine de Fourier, ces expressions se simplifient, puisque les produits de convolution peuvent être remplacés par des multiplications. Nous utiliserons préférentiellement ces relations :

$$S_{il}(\omega) = \sum_j \left( \exp(j\omega T) \cdot \overline{h_{ij}(\omega)} \right) \times h_{lj}(\omega) \quad (5.4)$$

où  $\overline{h_{ij}}$  est le complexe conjugué de  $h_{ij}$ .

<sup>†</sup> Ceci constitue le cas idéal. Dans la pratique,  $T$  est choisi légèrement inférieur au temps d'arrivée du rebond que nous avons déjà évoqué en 2.4.2.

Le signal reçu sur une voie  $l$  quelconque après retournement temporel s'écrit donc :

$$S_{il}(t) = \text{TF}^{-1} \left( \exp(j\omega T) \cdot \sum_j \overline{h_{ij}(\omega)} \times h_{lj}(\omega) \right) \quad (5.5)$$

$$= \delta(T - t) \otimes \text{TF}^{-1} \left( \sum_j \overline{h_{ij}(\omega)} \times h_{lj}(\omega) \right) \quad (5.6)$$

Cette dernière expression met en avant le temps  $T$  de refocalisation à partir de la ré-émission des signaux. La **compression temporelle**, qui est le signal recréé par retournement temporel à la source, se calcule donc ainsi :

$$S_{ii}(t) = \delta(T - t) \otimes \text{TF}^{-1} \left( \sum_j \overline{h_{ij}(\omega)} \times h_{ij}(\omega) \right) \quad (5.7)$$

La **focalisation spatiale** autour de la source initiale  $i$ , notée  $F_i(l)$ , est définie par l'amplitude du signal recréé sur chacune des positions  $l$  de la barrette **A** au temps  $t = T$ . Expérimentalement, on a plutôt tendance à utiliser une fonction maximum, ce qui est *a priori* équivalent à la définition ci-dessus dans la mesure où l'opération de retournement temporel réalise un filtrage adapté (c'est-à-dire qu'il maximise l'énergie au temps de la refocalisation). On la calcule donc ainsi :

$$F_i(l) = \text{Max}_t \left| \text{TF}^{-1} \left( \sum_j \overline{h_{ij}(\omega)} \times h_{lj}(\omega) \right) \right| \quad (5.8)$$

La conclusion de ces manipulations est que l'opération de retournement temporel peut être simulée à partir de signaux acquis avec une électronique monovoie classique, en faisant l'hypothèse de réciprocité du milieu de propagation, et en utilisant les expressions 5.7 et 5.8 ci-dessus.

### 5.1.3 Retournement temporel en milieu désordonné

La première démonstration expérimentale de la réversibilité des ondes acoustiques en milieu multiplement diffuseur désordonné a été menée par A. Derode en 1995 [73].

Dans l'expérience initiale, le milieu de propagation est constitué d'un échantillon de 2000 tiges réparties aléatoirement, d'épaisseur 75 mm. Une source ponctuelle émet un signal bref (de l'ordre de la microseconde) autour de 3,5 MHz. Les signaux transmis présentent alors une forte contribution incohérente, de très longue durée (250  $\mu$ s), qui résulte de la diffusion multiple sur les tiges. Après repropagation des signaux retournés temporellement, non seulement la compression temporelle s'est révélée excellente, mais la focalisation spatiale était également bien meilleure que celle obtenue en l'absence de l'échantillon multiplement diffuseur. Une résolution apparente de l'ordre d'un sixième de la limite de diffraction a pu être constatée.

Nous présentons les principales explications de ces résultats *a priori* surprenants, qui nous serviront également à comprendre et interpréter les résultats du retournement temporel à travers les cristaux phononiques.



### Compression temporelle

On caractérise classiquement la qualité de la compression temporelle par le facteur de contraste  $\Theta$ , que l'on définit comme le rapport de l'amplitude du pic sur la racine de la puissance moyenne du bruit environnant, soit :

$$\Theta = \frac{\max_t(S_{ii}(t))}{\sqrt{\frac{1}{b-a} \int_a^b S_{ii}^2(t) dt}} \quad (5.9)$$

où  $[a,b]$  est une fenêtre temporelle prise dans le bruit, en dehors du pic.

Il a été montré que le facteur de contraste était proportionnel à la racine carrée du nombre  $N$  de grains d'informations, celui-ci étant défini comme le rapport  $\Delta T/\tau$ , où  $\Delta T$  est la longueur du signal diffusé et  $\tau$  la durée caractéristique de l'impulsion initiale [74].

Alternativement, on retrouve également une expression du nombre de grains d'informations dans le domaine de Fourier, puisque  $\tau \approx 1/\Delta\omega$  où  $\Delta\omega$  est la largeur de bande passante, et  $\Delta T \approx 1/\delta\omega$  où  $\delta\omega$  est la largeur caractéristique de la fonction d'autocorrélation fréquentielle. D'où l'on tire  $N = \Delta T/\tau \approx \Delta\omega/\delta\omega$  [78].

A. Derode a étudié l'évolution du facteur de contraste de la compression temporelle en fonction de l'épaisseur de l'échantillon multidiffuseur dans la référence [78]. Cette première étude a montré une dégradation progressive du facteur de contraste pour des épaisseurs croissantes d'échantillons, du fait de l'apparition de lobes secondaires persistants dans la compression temporelle. La thèse de Victor Mamou confirme et précise cette étude, en démontrant que la qualité de la compression temporelle à travers des échantillons multiplement diffuseurs résulte de la compétition entre deux effets.

Dans un premier temps, on constate expérimentalement que l'augmentation de l'épaisseur de l'échantillon entraîne une diminution de la longueur caractéristique de corrélation fréquentielle  $\delta\omega$ . Cela traduit une décorrélation plus rapide du *speckle*<sup>‡</sup> en transmission.

En contrepartie, l'augmentation de l'épaisseur d'un échantillon de tiges a lieu au détriment de la largeur de bande passante. En effet, le spectre moyen de l'onde transmise s'appauvrit du fait des contributions résonantes des diffuseurs individuels [79], notamment autour de 2,7 MHz pour les tiges que nous utilisons.

Pour des échantillons de plus en plus épais, l'appauvrissement de la bande passante du signal transmis est un effet plus important que la diminution de la longueur de corrélation fréquentielle. De fait, le nombre de fréquences indépendantes dans la bande passante (ou grains d'information) tend à diminuer, ce qui entraîne une chute du rapport signal sur bruit de la compression temporelle.

Cette étude a donc mis en évidence l'intérêt d'avoir un grand nombre de fréquences décorrélées dans la bande passante pour obtenir une compression temporelle la plus proche possible de l'impulsion initiale.

---

<sup>‡</sup>ou contribution incohérente

### Focalisation spatiale

Hyperfocalisation est le terme retenu pour qualifier l'amélioration de la résolution (c'est-à-dire la largeur à mi-hauteur de la focalisation spatiale) en présence d'un milieu multiplement diffuseur quelle que soit l'ouverture du miroir à retournement temporel.

Nous reproduisons ici la figure originale de la référence [73] qui illustre cette amélioration de la résolution de focalisation en milieu désordonné par rapport à la focalisation en milieu homogène de référence (figure 5.2).

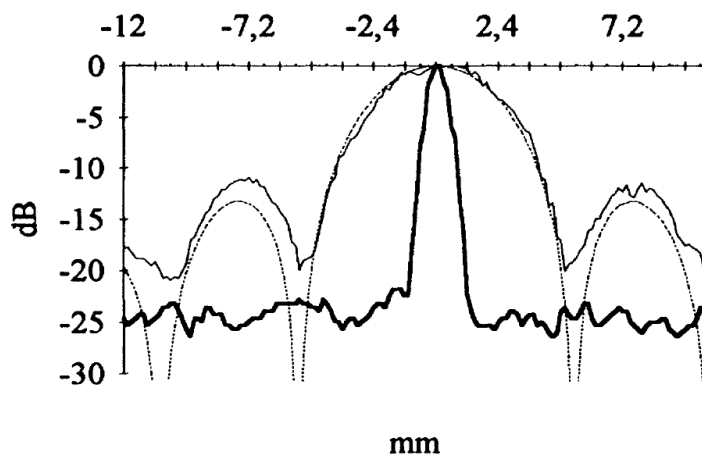


FIG. 5.2 – Tâches focales mesurées à 3,5 MHz dans l'eau (trait fin) et à travers un échantillon multiplement diffuseur (trait gras) – figure issue de la référence [73].

Comment expliquer la dimension caractéristique de cette tache focale, qui semble inférieure à la limite de diffraction ?

En première approche, on peut considérer qu'un échantillon multiplement diffuseur suffisamment large est capable d'intercepter une plus grande partie du spectre angulaire de la source que la barrette de récepteurs en milieu homogène. Les hautes fréquences spatiales de la source (représentées par un trait rouge sur la figure 5.3) –qui auraient été perdues en l'absence de l'échantillon– sont alors susceptibles d'être redirigées vers l'ouverture limitée de la barrette de transducteurs. De fait, un milieu multiplement diffuseur désordonné reporte dans le domaine temporel une information spatiale et joue le rôle d'une lentille acoustique lors de la phase de repropagation. L'expérience n'est donc pas en contradiction avec la limite de résolution prévue par les lois de la diffraction, puisque l'ouverture angulaire du milieu vu depuis la source initiale est supérieure à celle de la barrette.

Une autre explication, fondée sur la réciprocité de la propagation, nous permet de mettre en relation la largeur de la tache focale avec la longueur de cohérence spatiale des signaux transmis à travers l'échantillon.

Dans ce raisonnement, que nous empruntons à A. Derode [78], nous utilisons uniquement 3 transducteurs, notés  $i$ ,  $j$  et  $l$ , tels que positionnés sur la figure 5.1. Le transducteur  $i$  émet un signal bref : le transducteur  $j$  enregistre  $h_{ij}(t)$ , qui est retourné temporellement puis ré-émis.

La compression temporelle au point  $i$  s'écrit classiquement  $h_{ij}(-t) \otimes h_{ji}(t)$ , dans laquelle

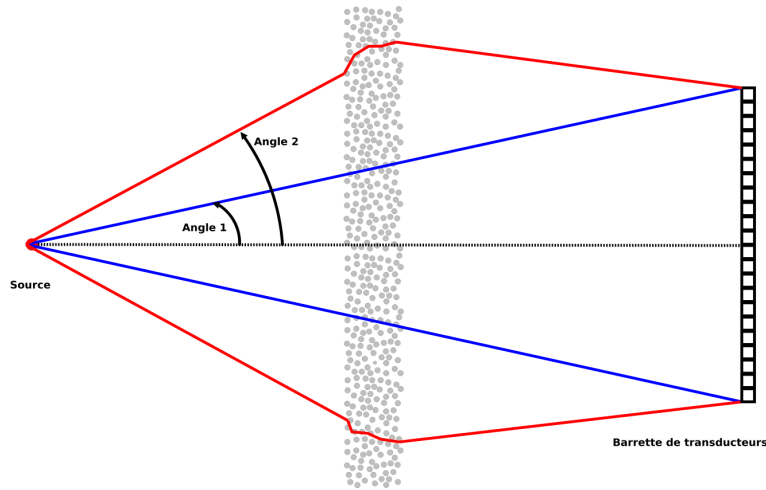


FIG. 5.3 – En milieu homogène, la tache focale après retournement temporel dépend de l'ouverture de la barrette (matérialisée par les traits bleus). Quand l'échantillon multiple diffuseur est présent, les fréquences angulaires plus élevées de la source peuvent être redirigées vers l'ouverture du réseau de transducteurs (traits rouges). Dans la phase de ré-émission, le retournement temporel crée alors une source de plus grande ouverture angulaire.

nous omettons volontairement le temps  $T$  pour alléger l'écriture. Au point  $l$ , le signal recréé par retournement temporel vaut pareillement  $h_{ij}(-t) \otimes h_{jl}(t)$ .

La focalisation spatiale  $F_i(l)$  peut alors être évaluée en fonction de la distance  $d_{il}$  entre les points  $i$  et  $l$  en prenant la valeur au temps zéro de  $h_{ij}(-t) \otimes h_{jl}(t)$ , c'est-à-dire

$$F_i(l) = \int h_{ij}(t)h_{jl}(t)dt = \int h_{ji}(t)h_{jl}(t)dt \quad \text{par réciprocité} \quad (5.10)$$

La réciprocité permet ici de faire apparaître les réponses impulsionnelles  $h_{ji}$  et  $h_{jl}$  des signaux transmis en réponse à une excitation virtuelle depuis le point source  $j$ .

Il faut ensuite remarquer que la focalisation s'écrit aussi bien dans le domaine de Fourier :

$$F_i(l) = \int \overline{h_{ji}(\omega)}h_{jl}(\omega)d\omega \quad (5.11)$$

Cette expression peut s'interpréter comme une moyenne sur les fréquences de  $\overline{h_{ji}(\omega)}h_{jl}(\omega)$ , c'est-à-dire comme l'estimateur  $\langle \overline{h_{ji}(\omega)}h_{jl}(\omega) \rangle$  de la fonction de corrélation spatiale des signaux transmis.

En cela, la résolution spatiale en milieu multiple diffuseur (*i.e.* la largeur à -6 dB de la tache focale) est simplement liée à la longueur de cohérence spatiale du champ transmis à travers l'échantillon multidiffuseur, et non à l'ouverture angulaire du miroir à retournement temporel comme c'est le cas en milieu homogène. Cette interprétation permet d'expliquer une caractéristique de l'hyperfocalisation, qui est son indépendance en fonction du nombre de transducteurs participant au retournement temporel.

## **5.2 Retournement temporel dans les cristaux : cas d'une source à l'extérieur du cristal**

Historiquement, les premières expériences qui ont été menées dans des milieux multiplement diffuseurs se fixaient pour objectif d'étudier les limites d'une expérience de retournement temporel lorsque la complexité du milieu de propagation s'accroît. De fait, le retournement temporel des ondes acoustiques n'a jamais été étudié dans des milieux ordonnés. Contrairement à l'intuition initiale, nous verrons en quoi les "cristaux phononiques" sont assurément de meilleurs candidats que les milieux désordonnés pour dégrader la focalisation spatiale.

Dans la section qui suit, nous nous proposons d'étudier la qualité de la focalisation spatio-temporelle à travers un cristal phononique en terme de résolution et de rapport signal sur bruit. Nous comparerons les résultats à ceux obtenus en milieu homogène et désordonné.

### **5.2.1 Expériences et résultats**

Le retournement temporel est un processus qui exploite naturellement une large bande de fréquences. Dans la pratique, cette gamme de fréquences est limitée par la bande passante des transducteurs utilisés pour enregistrer les signaux. Dans un cristal phononique, nous avons vu que la périodicité de l'arrangement des diffuseurs se traduisait par l'apparition de bandes de fréquences interdites. Pour explorer les différences entre un milieu périodique et un milieu désordonné, il semble donc judicieux de choisir la gamme de fréquence du retournement temporel aux alentours de la bande interdite.

Nous avons donc réalisé des expériences de retournement temporel en transmission à l'aide de deux transducteurs de fréquence centrale 500 kHz. La fréquence de travail étant fixée par les caractéristiques du cristal, deux raisons nous ont poussé à utiliser un dispositif à deux mono-éléments plutôt qu'une barrette de transducteurs. La première est liée aux barrettes dont nous disposons à ces fréquences. Celles-ci ne sont pas suffisamment sensibles en émission pour compenser l'atténuation introduite par le cristal phononique. La deuxième raison vient de la non-linéarité de notre électronique d'acquisition multi-voies, qui réhausse les signaux de faible amplitude relativement aux signaux d'amplitude plus élevée.

Le cristal phononique que nous avons utilisé dans ces expériences est formé de 8 rangées de 100 tiges réparties sur un réseau carré de pas 1,5 mm. Pour disposer d'un point de comparaison, nous avons été amenés à construire un échantillon désordonné de mêmes dimensions (11,3 x 150 mm) et densité en diffuseur (22 %).

Afin d'enregistrer la matrice des réponses impulsionnelles en transmission, deux monoéléments sont déplacés de manière indépendante parallèlement aux faces d'entrée des échantillons. Les signaux sont émis et reçus en 41 positions de part et d'autre des échantillons de telle sorte que la durée d'acquisition de la matrice soit inférieure à la demi-heure. Le pas d'échantillonnage spatial vaut 1,5 mm, et correspond à la moitié de la longueur d'onde centrale dans l'eau. A partir de cette matrice, nous avons vu qu'il était possible de reconstituer les opérations de re-

retournement temporel en utilisant les relations 5.7 et 5.8. Les résultats fournis par cette méthode n'en sont pas moins valables, dans la mesure où ils sont basés sur une matrice de propagation acquise rapidement en conditions réelles. La vitesse d'acquisition est ici essentielle, puisque le retournement temporel est extrêmement sensible à toute modification du milieu de propagation [80]. Une faible variation de la température au cours de l'acquisition de la matrice de propagation est en particulier susceptible de perturber la refocalisation par retournement temporel.

Nous présentons sur la figure 5.4 les réponses impulsionnelles enregistrées en transmission, reconstituées au format B-scan.

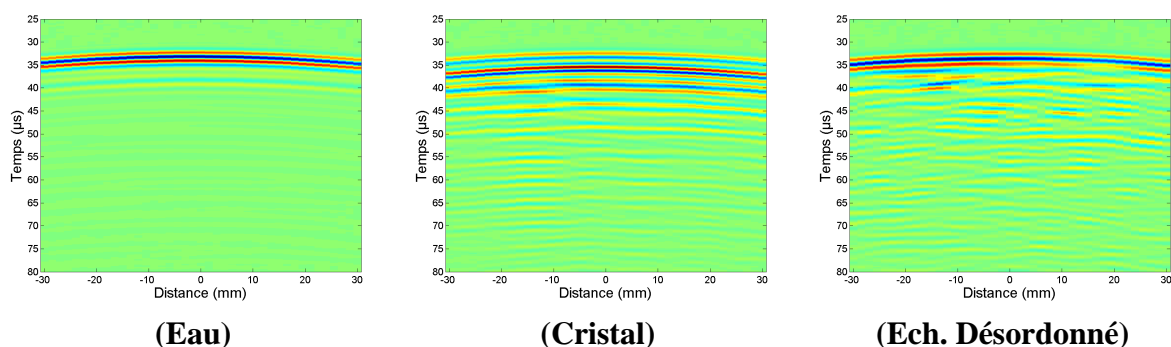


FIG. 5.4 – Signaux enregistrés en transmission à travers l'eau, le cristal phononique de 8 rangées de tiges et l'échantillon désordonné de mêmes épaisseur et densité.

Ces signaux ont été virtuellement retournés temporellement et ré-émis par la totalité des points de contrôle du champ de manière à générer une image de la source initiale. Plus précisément, la contribution balistique<sup>§</sup> aux signaux enregistrés à travers les deux échantillons a été retirée lors de l'opération de retournement temporel. Cette opération est rendue nécessaire par la faible épaisseur des échantillons, qui ne permet pas d'atténuer significativement le signal balistique. La repropagation des signaux complets conduirait en effet à une focalisation spatiale proche de celle de l'eau.

Nous présentons sur les figures 5.5 à 5.10 les compressions temporelles et focalisations spatiales qui en résultent.

### 5.2.2 Compressions temporelles

Au point focal, la compression temporelle obtenue dans l'eau (figure 5.5) est de courte durée et présente un excellent facteur de contraste : 51 dB.

En regard, la compression temporelle dans l'échantillon périodique est très dégradée. Le bruit, fortement instationnaire, étant quasiment au même niveau que le pic d'amplitude central, il est difficile de définir avec précision le facteur de contraste. Si l'on choisit une fenêtre temporelle entre 7 et 60  $\mu$ s après le temps de recompression, le facteur de contraste s'établit à 15 dB.

<sup>§</sup>Le signal balistique correspond aux premiers fronts d'ondes qui se sont propagés au sein du milieu multiple-ment diffuseur à la vitesse de l'eau.

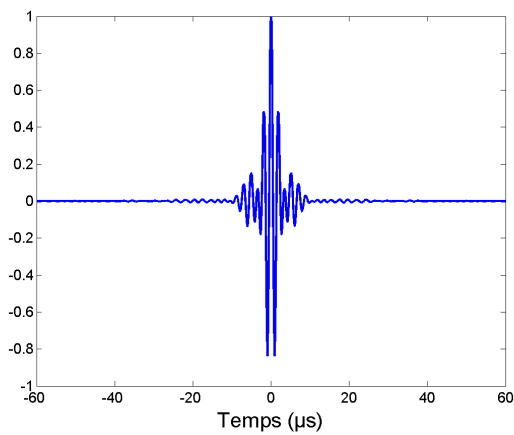


FIG. 5.5 – Compression temporelle dans l'eau.

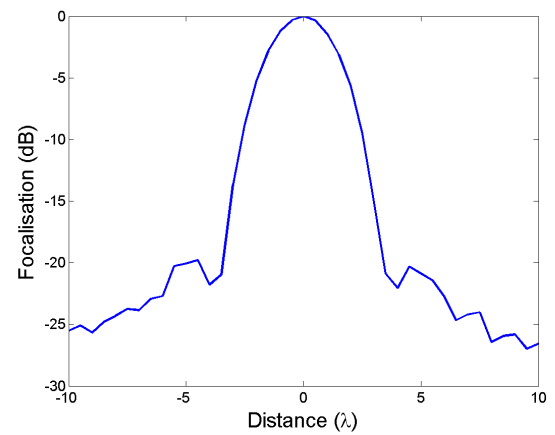


FIG. 5.6 – Focalisation spatiale dans l'eau (résolution :  $4,2 \lambda$ ).

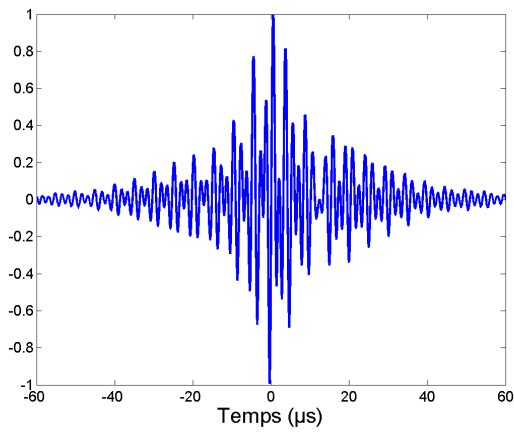


FIG. 5.7 – Compression temporelle avec l'échantillon ordonné.

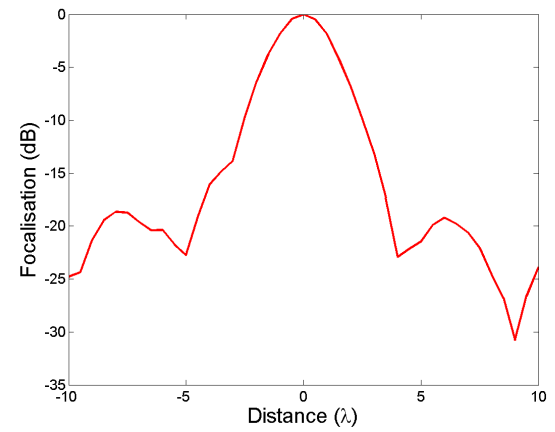


FIG. 5.8 – Focalisation spatiale avec l'échantillon ordonné (résolution :  $3,8 \lambda$ ).

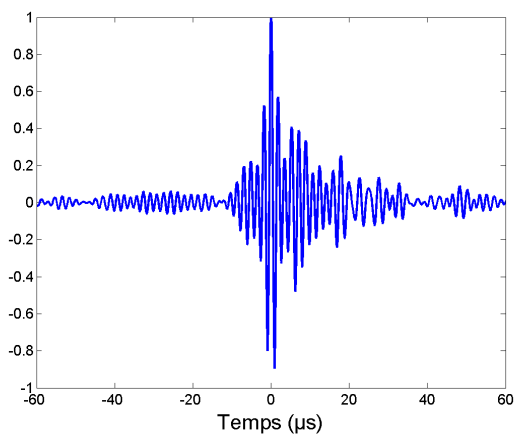


FIG. 5.9 – Compression temporelle avec l'échantillon désordonné.

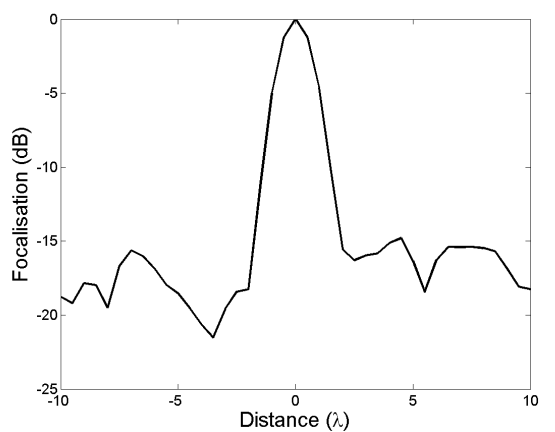


FIG. 5.10 – Focalisation spatiale avec l'échantillon désordonné (résolution :  $2,3 \lambda$ ).

L'étalement temporel du pic de recompression est dû au fort effet de filtrage du cristal, qui se manifeste sur la figure 5.11 par l'atténuation importante des fréquences centrales de la bande passante du transducteur.

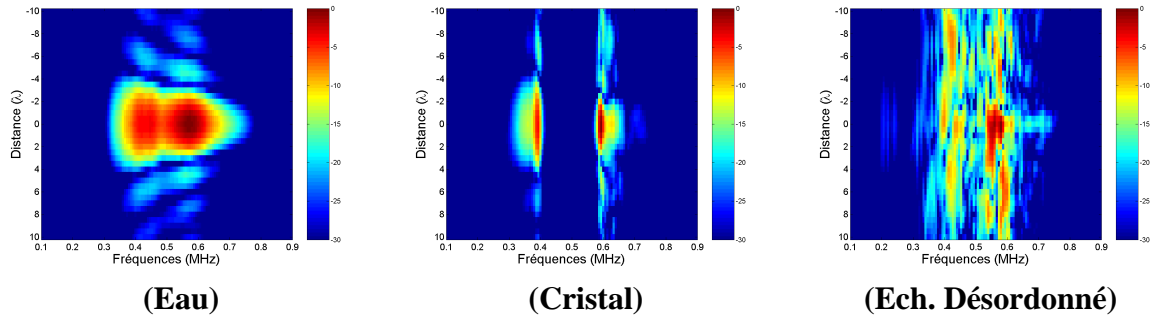


FIG. 5.11 – Contenu fréquentiel des focalisations spatio-temporelles à travers les différents milieux de propagation.

Dans l'échantillon désordonné, la compression est également très bruitée, puisque le facteur de contraste (19 dB) est à peine supérieur à celui de l'échantillon ordonné. Ce facteur de contraste est étonnamment faible par rapport aux expériences de retournement temporel que l'on réalise classiquement à plus haute fréquence. Nous tentons ici d'y apporter une explication.

A basse fréquence, un diffuseur rigide présente une section différentielle de diffusion maximale dans la direction opposée à l'insonification. Autrement dit, le "cosinus moyen", que l'on définit par

$$\langle \cos \theta \rangle = \frac{1}{\sigma_T} \int_0^{2\pi} \cos(\theta) \sigma(\theta) d\theta \quad (5.12)$$

est proche de -1 (voir la figure 5.12).

Si le diagramme de directivité d'un diffuseur unique présente de telles caractéristiques, un milieu constitué d'une assemblée de ces diffuseurs diffusera naturellement très peu d'énergie dans la direction d'incidence à basse fréquence, quelle que soit la nature de l'arrangement des diffuseurs. Puisque les expériences de retournement temporel sont fondées sur la partie incohérente des signaux transmis à travers les échantillons<sup>¶</sup>, nous perdons ainsi une grande partie de l'information initiale. De fait, c'est probablement dans cette situation que l'absence de cavité à retournement temporel est le plus dommageable, ce qui compromet la qualité de la compression temporelle.

La dégradation de la compression temporelle résulte également d'un effet de filtrage fréquentiel, qui intervient dès 300 kHz, comme nous pouvons le constater sur la figure 5.13.

Cette dernière figure révèle en fait deux régimes d'atténuation, qui se manifestent l'un par une lente décroissance de la transmission avec la fréquence, l'autre par une atténuation forte

<sup>¶</sup>c'est-à-dire les ondes ayant subi plusieurs événements de diffusion.

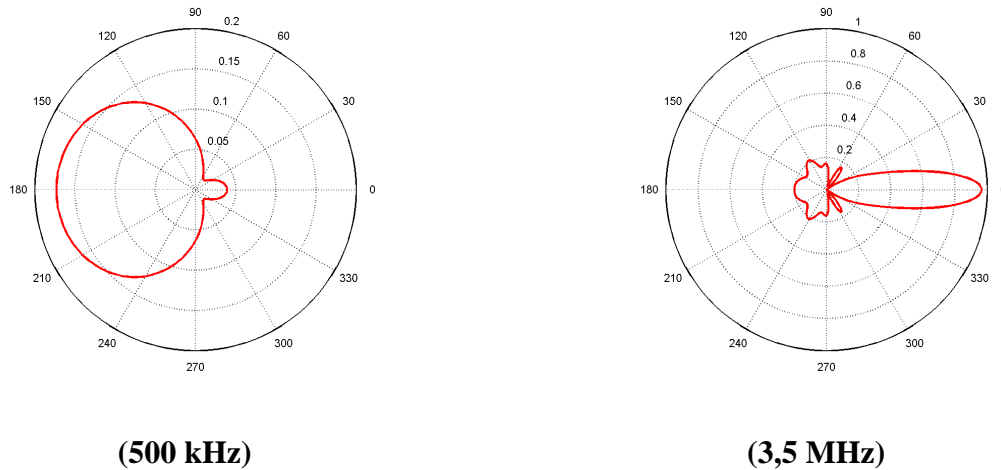


FIG. 5.12 – Sections efficaces différentielles de diffusion d'une tige de 0,8 mm de diamètre. A 500 kHz,  $\langle \cos \theta \rangle = -0.478$ . A 3,5 MHz,  $\langle \cos \theta \rangle = 0.175$ .

des fréquences de l'onde cohérente autour de 670 kHz.

Nous expliquons la décroissance progressive de la transmission par les propriétés du milieu effectif dans lequel se déplace l'onde cohérente à ces fréquences. Nous allons pour cela nous intéresser au libre parcours moyen élastique, qui est la longueur caractéristique d'extinction de l'intensité cohérente en milieu multiplement diffuseur. Dans le cadre de l'ISA (*Independent Scattering Approximation*), le libre parcours moyen élastique  $l_e$  est donné par la formule  $l_e = 1/n\sigma_T$ , où  $n$  est la densité en diffuseurs et  $\sigma_T$  la section efficace totale de diffusion. Or, nous avons vu (figure 3.8) que la section efficace totale de diffusion d'une tige était strictement croissante dans la gamme de fréquences étudiée : sa valeur augmente d'un facteur 4 entre 300 et 700 kHz. De fait, le libre parcours moyen décroît rapidement avec la fréquence, ce qui permet d'expliquer l'augmentation de l'atténuation avec la fréquence, que nous observons sur l'onde cohérente.

La question reste ouverte quant à l'origine précise du pic d'atténuation que nous avons mis en évidence à 670 kHz. Il est possible que des corrélations entre les positions des diffuseurs existent dans le milieu, du fait d'une distance d'exclusion que nous avons définie à 1 mm centre à centre entre tiges voisines. La diffusion récurrente entre diffuseurs proches voisins pourrait alors expliquer le pseudo-gap observé.

### 5.2.3 Focalisations spatiales

Dans l'eau, la tache focale créée par la plus grande ouverture du miroir à retournement temporel (41 éléments) présente une largeur caractéristique de 12,6 mm. A travers l'échantillon désordonné, la résolution est améliorée puisque la tache focale mesure 6,9 mm. En revanche, la



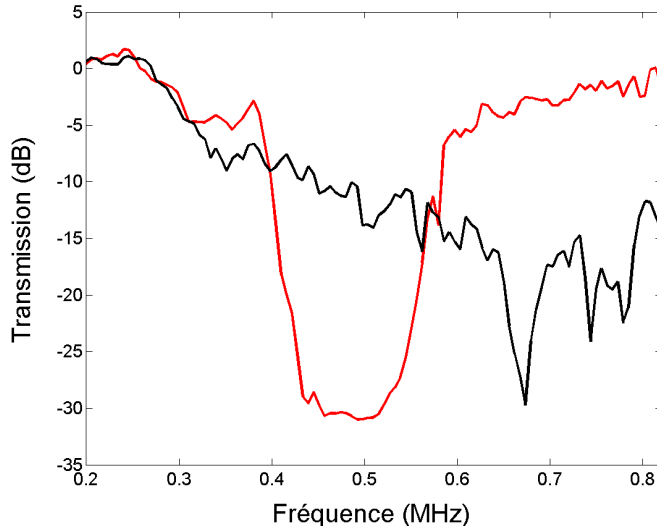


FIG. 5.13 – Facteur de transmission de l'onde cohérente dans l'échantillon désordonné (noir) et dans le cristal phononique (rouge).

résolution de focalisation à travers l'échantillon périodique est comparable à celle obtenue dans l'eau (11,4 mm).

Plus étonnant, une étude de la résolution en fonction de l'ouverture du miroir à retournement temporel (figures 5.14 et 5.15) révèle une résolution de focalisation en milieu périodique très proche de celle de l'eau, quelle que soit l'ouverture. En présence du milieu désordonné, le retournement temporel conduit à une résolution de focalisation indépendante de la dimension de la barrette ré-émettrice, ce qui est conforme aux résultats présentés dans les références [73] et [78].

Nous avons vu que la résolution de focalisation était liée à la longueur de corrélation spatiale des signaux transmis. Pouvons nous évaluer cette longueur de corrélation pour les échantillons périodiques et désordonnés ?

Dans cette perspective, nous étendons la définition du degré de cohérence spatiale proposée par A. Derode pour des signaux rétrodiffusés [74] aux signaux mesurés en transmission.

Supposons qu'une onde plane soit envoyée sur un milieu multiple diffuseur. Le signal transmis est échantillonné spatialement à l'aide d'une barrette de  $N$  transducteurs, chacun enregistrant un signal  $S_i(t)$ . Le degré de cohérence spatiale est alors estimé sur une fenêtre temporelle  $[T_1, T_2]$  : celle-ci permet typiquement de prendre en compte le front balistique ou non.

Pour chaque couple de transducteurs  $(i, j)$ , on définit une fonction de corrélation  $c(i, j)$  :

$$c(i, j) = \sum_{T_1}^{T_2} (S_i(t) - \overline{S_i}) (S_j(t) - \overline{S_j}) \quad \text{avec} \quad \overline{S_k} = \frac{1}{T_2 - T_1} \sum_{T_1}^{T_2} S_k(t) \quad (5.13)$$

Les coefficients  $c(i, j)$  sont ensuite moyennés et normalisés, de façon à obtenir un degré de ressemblance adimensionné  $\rho(m)$ , fonction de la distance  $m = |i - j|$  séparant deux points

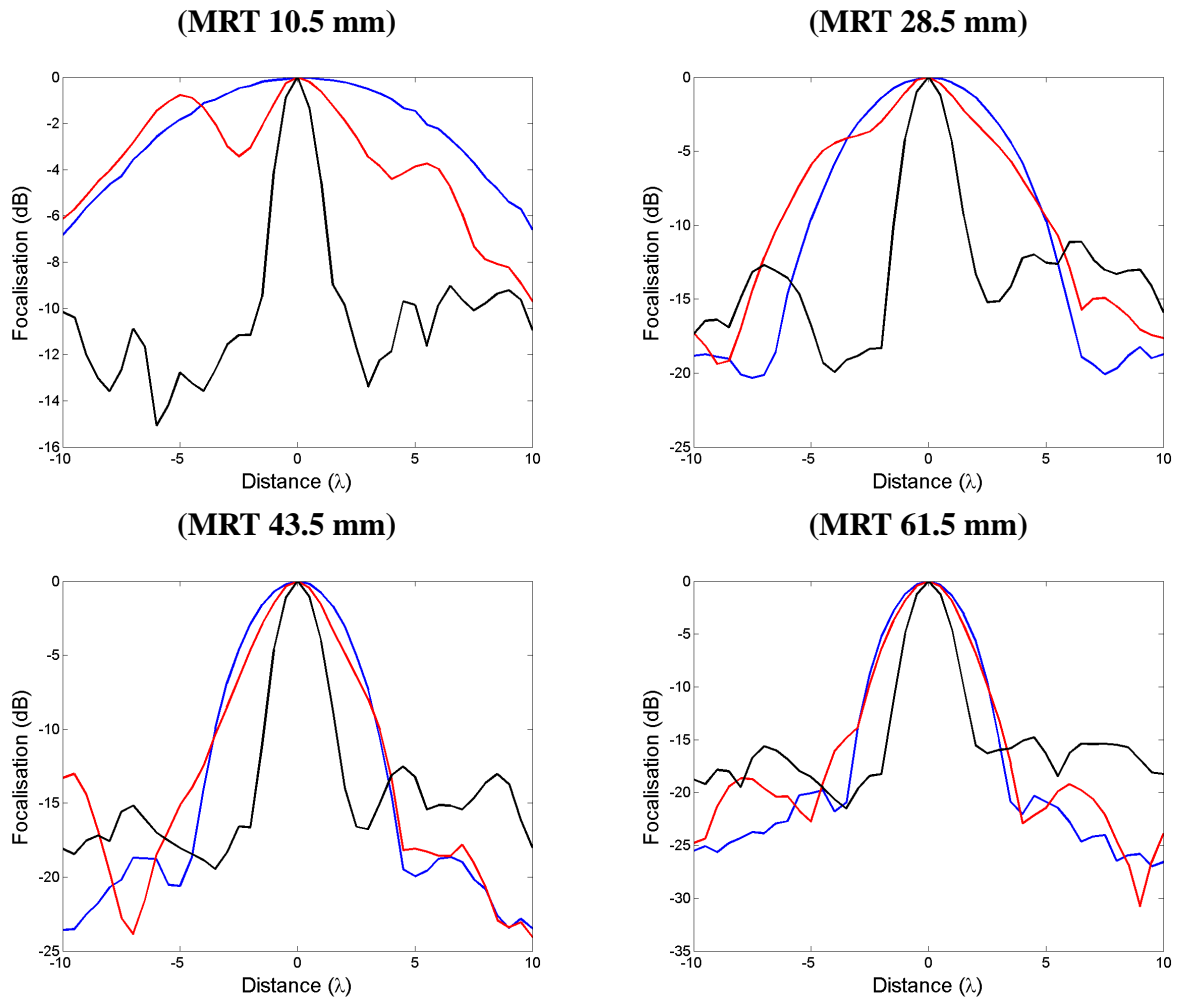


FIG. 5.14 – Focalisations spatiales dans l'eau (bleu), l'échantillon périodique (rouge) et l'échantillon désordonné (noir) pour quatre ouvertures croissantes du miroir à retournement temporel (10.5 mm, 28.5 mm, 43.5 mm et 61.5 mm, respectivement 7, 19, 29 et 41 transducteurs).

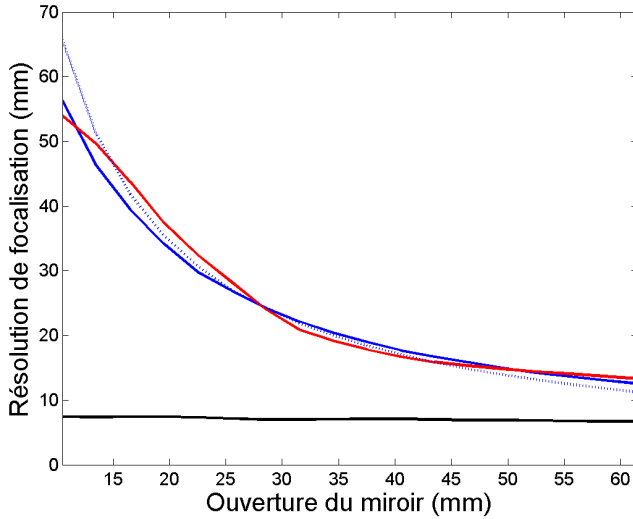


FIG. 5.15 – Résolution de focalisation en fonction de l'ouverture du miroir à retournement temporel (eau en bleu, échantillon périodique en rouge, échantillon désordonné en noir). En pointillés bleus, la résolution théorique de focalisation dans l'eau.

récepteurs :

$$\rho(m) = \frac{N}{N-m} \frac{\sum_{i=1}^{N-m} c(i, i+m)}{\sum_{i=1}^N c(i, i)} \quad (5.14)$$

Nous représentons les valeurs de cet estimateur du degré de cohérence spatiale des signaux transmis en fonction de la distance entre capteurs sur la figure 5.16.

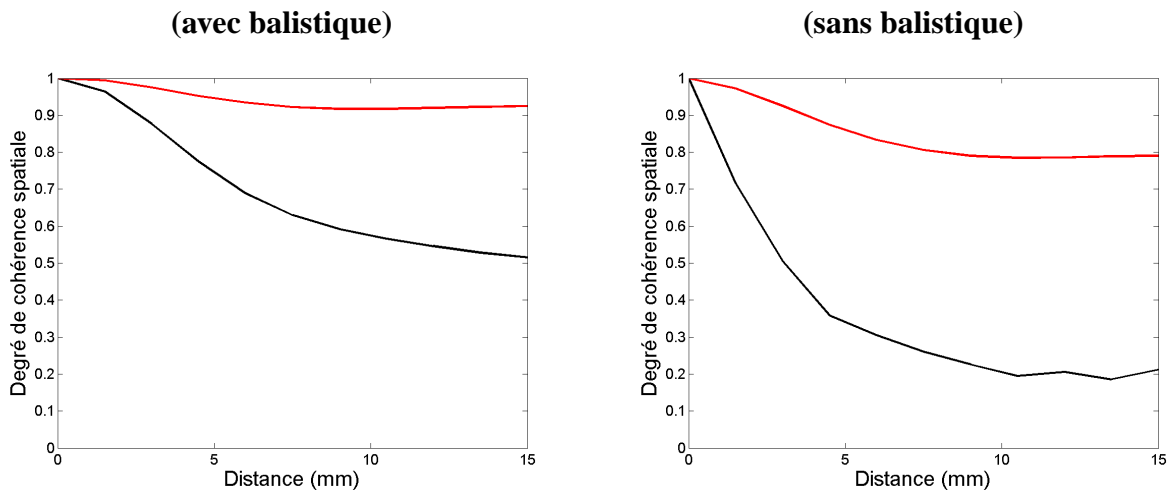


FIG. 5.16 – Estimation du degré de cohérence spatiale des signaux transmis à travers l'échantillon périodique (en rouge) et désordonné (en noir). A gauche, le signal intégral a été pris en compte ; A droite, on a tronqué le balistique.

Le champ enregistré en sortie de l'échantillon périodique présente une longueur de cohérence spatiale importante, que la fenêtre temporelle prenne en compte le signal balistique ou

non. Le degré de cohérence spatiale reste en effet supérieur à 80 % jusqu'à des distances entre capteurs de l'ordre de 5 longueurs d'onde.

Dans l'échantillon désordonné, et en supprimant l'onde balistique, le degré de cohérence spatiale des signaux diffusés chute rapidement avec la distance entre capteurs, ce qui nous permet de définir une longueur de corrélation caractéristique. Celle-ci est petite devant la longueur de corrélation spatiale en milieu périodique.

Dans la mesure où la focalisation spatiale en milieu multiplement diffuseur est gouvernée par la longueur de cohérence spatiale du champ en sortie de l'échantillon, ces mesures confirment l'amélioration de la résolution que nous observons en milieu désordonné, et l'absence d'hyperrésolution en milieu ordonné.

Pour expliquer les différences de longueur de cohérence du champ en sortie des échantillons, notre hypothèse est que l'échantillon périodique préserve la cohérence spatiale des ondes incidentes, alors que l'échantillon désordonné la détruit rapidement en assurant une redirection importante des vecteurs d'onde incidents.

Pour vérifier cette hypothèse, nous représentons sur la figure 5.17 les transformées de Fourier spatiales du signal transmis à travers les différents milieux de propagation pour six fréquences de la bande passante des transducteurs.

Quelle que soit la fréquence, le spectre angulaire du signal ayant traversé l'échantillon désordonné est plus large que le spectre mesuré dans l'eau.

En revanche, le spectre angulaire du signal mesuré à travers le cristal phononique est très proche de celui de l'eau, sauf peut-être pour les plus hautes fréquences (700 et 800 kHz)<sup>||</sup>. Cela traduit l'absence de redirection des vecteurs d'onde par l'échantillon ordonné pour la plupart des fréquences de la bande passante.

Dans le retournement temporel des ondes acoustiques, l'effet d'hyperfocalisation n'est donc pas induit par la présence d'un milieu multiplement diffuseur quelconque positionné entre la source et le miroir à retournement temporel. Celui-ci doit au minimum assurer une redirection efficace des vecteurs d'onde, afin de jouer le rôle de lentille acoustique lors de la phase de ré-émission du champ retourné temporellement.

### 5.2.4 Retournement temporel dans la bande interdite

Jusqu'ici, nous avons réalisé des expériences de retournement temporel en utilisant la totalité de la bande passante des transducteurs. Nous nous focalisons désormais sur le retournement temporel des ondes de fréquence comprise dans la bande interdite du cristal phononique. En raison des interférences qui ont lieu dans le cristal, les fréquences de la bande interdite sont transmises au sein du cristal sous la forme d'ondes évanescentes. Par diffraction sur la dernière rangée de tiges du cristal, celles-ci sont ensuite reconverties en ondes propagatives et

---

<sup>||</sup>A haute fréquence, l'onde devient plus sensible aux défauts dans l'arrangement des diffuseurs, qui sont autant de centres diffuseurs susceptibles de rediriger les vecteurs d'onde incidents.

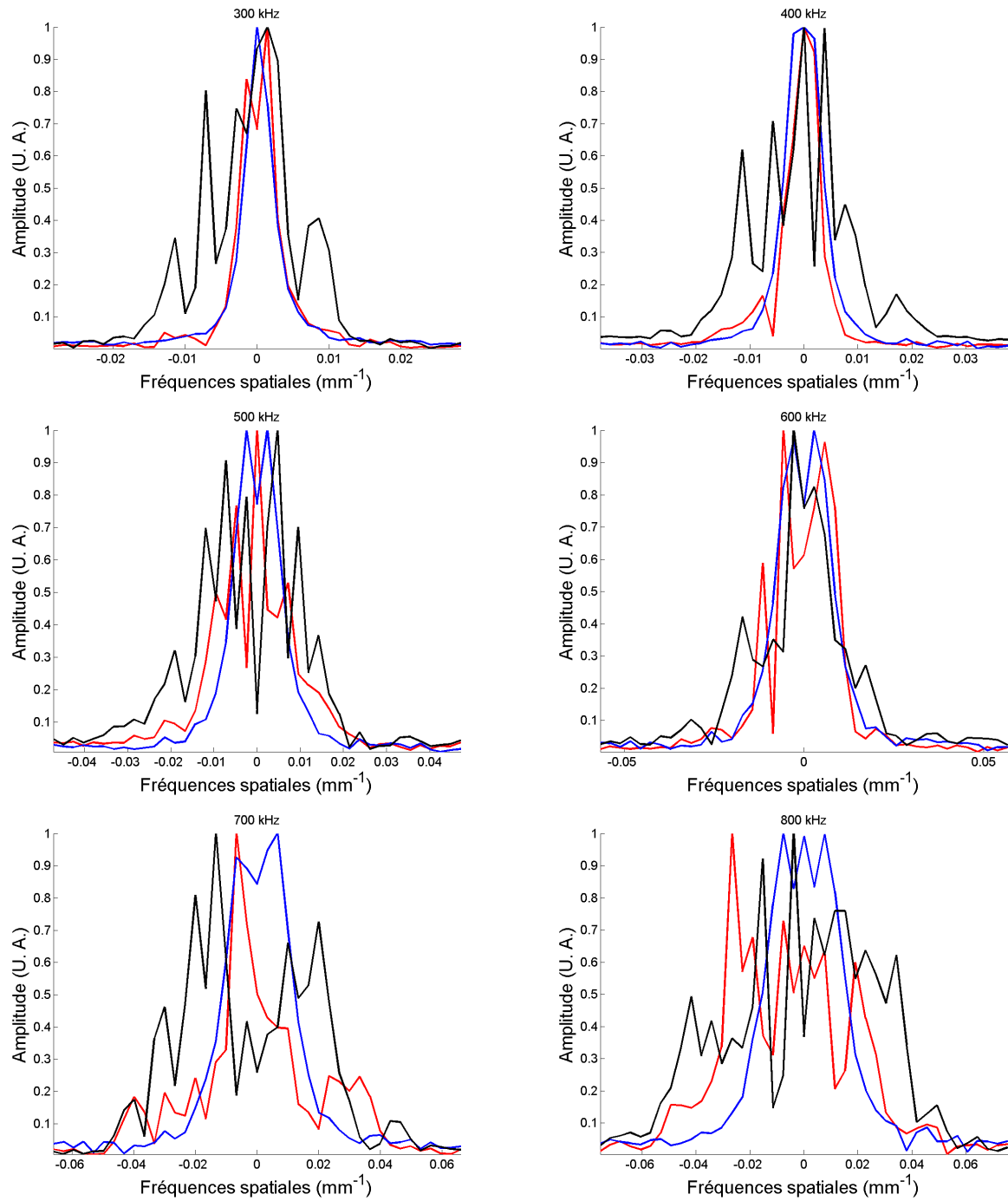


FIG. 5.17 – Fréquences spatiales normalisées transmises dans l'eau (bleu), l'échantillon périodique (rouge) et l'échantillon désordonné (noir) pour différentes fréquences dans la bande passante des transducteurs.

## 5.2. Retournement temporel dans les cristaux : cas d'une source à l'extérieur du cristal<sup>93</sup>

parviennent sous cette forme aux transducteurs.

Dans la mesure où nous souhaitons réaliser une expérience dans laquelle la propagation au sein du cristal est assurée par des ondes évanescentes, il est nécessaire que le spectre de la source initiale soit intégralement compris dans la bande interdite dudit cristal. Le dispositif étant linéaire, le retournement temporel en "bande étroite" est équivalent à la procédure qui consiste à filtrer au moyen d'un passe-bande les réponses impulsionnelles  $h_{ij}(t)$  enregistrées en transmission, à les retourner temporellement puis à les retransmettre dans le milieu au moyen des réponses impulsionnelles non filtrées. Nous avons pu vérifier la validité de cette approche, qui se base uniquement sur la réciprocité spatiale, en comparant entre eux les signaux que deux transducteurs situés de part et d'autre du cristal peuvent à tour de rôle émettre et recevoir.

Sur la figure 5.18.a, nous présentons la compression temporelle obtenue à partir de la matrice de propagation acquise avec le cristal phononique, et en suivant la procédure que nous venons de décrire. Le filtrage appliqué aux signaux est ici de type gaussien, de fréquence centrale 480 kHz et de largeur à mi-hauteur 50 kHz. On vérifie alors que l'essentiel de l'énergie envoyée est contenue dans la bande interdite du cristal, c'est-à-dire entre 395 et 567 kHz (figure 5.18.b).

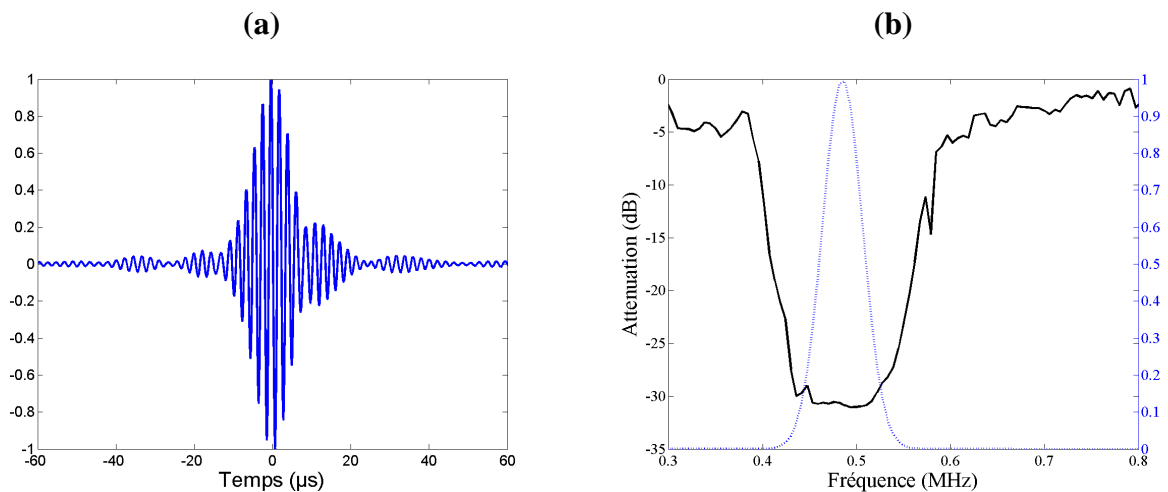


FIG. 5.18 – **(Figure a)** : Compression temporelle dans la bande interdite d'un cristal phononique de 8 rangées de tiges - **(Figure b)** : Profil du filtre gaussien superposé au facteur de transmission du cristal.

Dans l'échantillon périodique, nous obtenons au point focal un pulse aussi court que le signal initial, avec un faible niveau de bruit. Ceci est signe d'une bonne compression temporelle, et prouve la faisabilité d'une expérience de retournement temporel impliquant des ondes évanescentes au cours de la propagation.

De la comparaison entre la compression temporelle en "bande étroite" dans le cristal et celle obtenue en milieu désordonné dans la même gamme de fréquences (figure 5.19.a), deux

informations peuvent être extraites. Non seulement le pulse que l'on recrée au point source est moins bruité à travers l'échantillon périodique, mais il est également plus court (figure 5.19.b).

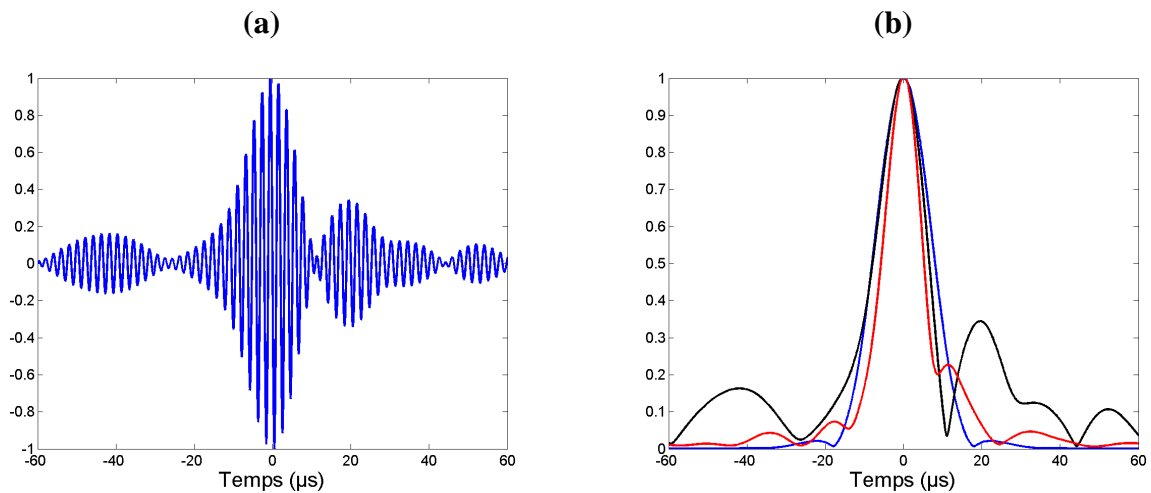


FIG. 5.19 – **(Figure a)** : Compression temporelle en bande étroite dans l'échantillon désordonné - **(Figure b)** : Comparaison des enveloppes des compressions temporelles dans l'eau (bleu), l'échantillon désordonné (noir) et ordonné (rouge).

Nous tentons tout d'abord d'expliquer l'amélioration du rapport signal sur bruit observée dans le cas de l'échantillon périodique.

Dans la bande interdite du cristal, le facteur de transmission est relativement constant, de telle sorte que toutes les fréquences sont transmises avec le même poids. En revanche, dans l'échantillon désordonné, certaines fréquences sont atténuées de manière aléatoire, comme en témoigne la figure 5.20. Il en résulte donc une dégradation de la compression temporelle.

Pour comprendre l'affinement du pic de recompression temporelle en milieu ordonné, il est nécessaire de préciser le raisonnement que nous venons d'établir.

Alors que le spectre des signaux transmis dans l'eau ou dans l'échantillon désordonné en réponse à une impulsion gaussienne est au mieux égal au spectre du signal de la source, celui du signal qui traverse l'échantillon périodique est en réalité enrichi en fréquences extrêmes. En effet, la largeur du filtre gaussien est telle que la décroissance du gabarit du filtre est exactement compensée par le renforcement de la transmission du cristal à ces fréquences. Grâce au profil d'atténuation de la bande interdite, le spectre des signaux retournés temporellement se rapproche donc plus d'une fenêtre carrée de largeur supérieure à celle du spectre gaussien initial (figure 5.21).

Si le pic de recompression temporelle est plus étroit dans la bande interdite du cristal que dans l'échantillon désordonné et dans l'eau, c'est donc en raison d'un spectre fréquentiel élargi.

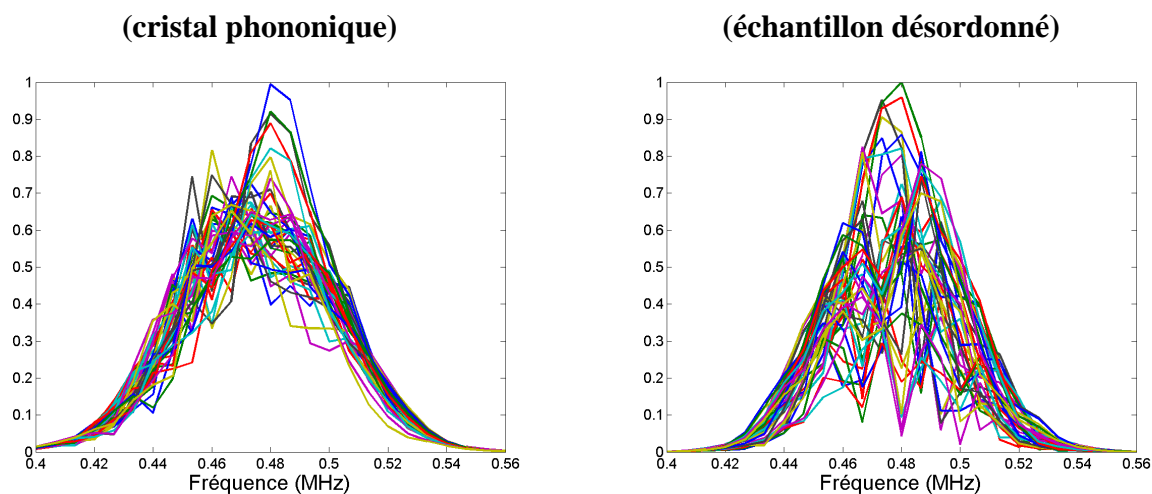


FIG. 5.20 – Spectre des 41 signaux mesurés en transmission à travers les deux échantillons dans la gamme de fréquences qui correspond à la bande interdite du cristal.

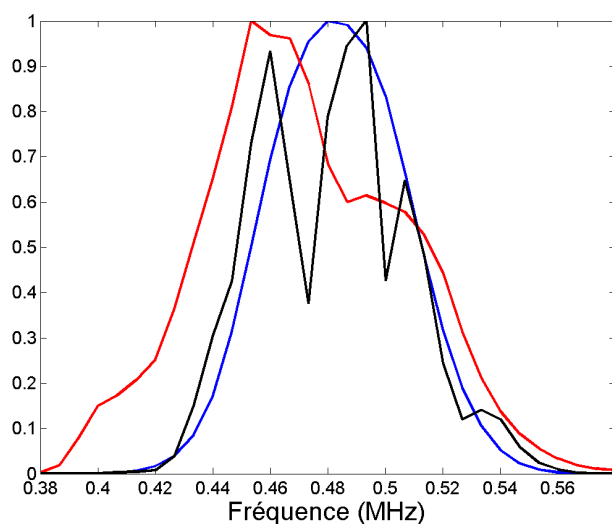


FIG. 5.21 – Spectre des compressions temporelles dans l'eau (bleu), l'échantillon désordonné (noir) et le cristal phononique (rouge).



### 5.3 Retournement temporel dans les cristaux : cas d'une source au sein du cristal

Pour des raisons pratiques, nous n'avons jusqu'alors envisagé le retournement temporel d'une onde que lorsque celle-ci est issue d'une source située à l'extérieur du cristal phonique. Dans un récent article [62], Derode *et al.* simulent le retournement temporel d'une onde issue d'une source au sein d'un milieu désordonné multiplement diffuseur grâce à un code aux différences finies. Nous nous proposons ici d'étendre cette étude aux milieux ordonnés : la focalisation par retournement temporel au sein d'un tel milieu est-elle possible et quelles en sont les caractéristiques ?

Les expériences étant, dans ce cas de figure, difficiles voire impossibles à réaliser, nous aurons recours aux simulations que nous avons développées au chapitre 3. Pour simuler la focalisation par retournement temporel au sein d'un cristal, il est bien évidemment possible d'utiliser le code aux différences finies "Acel", puisque celui-ci est fondé sur la résolution de l'équation de propagation. Pour autant, cette opération n'est pas optimale en termes de temps de calcul, puisqu'elle suppose de réaliser deux simulations pour chaque cas de figure. Il est une solution plus élégante pour calculer la focalisation par retournement temporel dans les cristaux, qui repose sur l'utilisation du code self-consistant pour calculer la fonction de Green dans le cristal. La focalisation spatiale au sein d'une cavité à retournement temporel s'exprime en effet simplement en fonction de la partie imaginaire de la fonction de Green, comme nous le rappelons maintenant.

#### 5.3.1 Expression de la focalisation spatiale

Dans la phase d'apprentissage, un point source situé en  $\mathbf{r}_0$  dans le volume  $V$  de la cavité émet une impulsion brève au temps  $t = t_0$ . La propagation de cette impulsion dans un milieu de densité  $\rho(\mathbf{r})$  et de compressibilité  $K(\mathbf{r})$  est régie par l'équation d'onde :

$$\nabla \cdot \left( \frac{1}{\rho(\mathbf{r})} \nabla \right) \phi(\mathbf{r}, t) - K(\mathbf{r}) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi(\mathbf{r}, t) = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \delta(t - t_0) \quad (5.15)$$

dont la solution est la fonction de Green  $G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0)$ . Celle-ci s'écrit classiquement comme la somme d'une onde sphérique divergente et d'un autre terme qui décrit l'interaction du champ avec les inhomogénéités du milieu.

En tout point de la cavité, on mesure sur une durée  $T$  le champ  $\phi_s(\mathbf{r}, t)$  issu de la source (terme monopolaire), ainsi que sa dérivée normale  $\partial_n \phi_s(\mathbf{r}, t)$  (terme dipolaire). Dans une deuxième phase, on recrée à la surface de la cavité des sources monopolaires et dipolaires, qui correspondent respectivement aux champs dipolaires et monopolaires enregistrés précédemment, et

retournés temporellement. On ré-émet donc :

$$\phi_s(\mathbf{r}, T - t) = G(\mathbf{r}, T - t | \mathbf{r}_0, t_0) \quad (5.16)$$

$$\partial_n \phi_s(\mathbf{r}, T - t) = \partial_n G(\mathbf{r}, T - t | \mathbf{r}_0, t_0) \quad (5.17)$$

De fait, un champ  $\phi^{TR}(\mathbf{r}_1, t_1)$  se propage dans la cavité, dont l'expression a été obtenue par D. Cassereau et M. Fink [70] en utilisant une généralisation du théorème de Green aux milieux hétérogènes :

$$\phi^{TR}(\mathbf{r}_1, t_1) = \int dt \int \int_S G(\mathbf{r}_1, t_1 | \mathbf{r}, t) \partial_n \phi_s(\mathbf{r}, T - t) - \partial_n G(\mathbf{r}_1, t_1 | \mathbf{r}, t) \phi_s(\mathbf{r}, T - t) \frac{d^2 r}{\rho(\mathbf{r})} \quad (5.18)$$

La réciprocité du milieu ainsi que l'invariance par retournement temporel de l'équation d'onde permettent alors d'exprimer le champ en tout point de la cavité [81] :

$$\phi^{TR}(\mathbf{r}_1, t_1) = G(\mathbf{r}_1, T - t_1 | \mathbf{r}_0, t_0) - G(\mathbf{r}_1, t_1 | \mathbf{r}_0, T - t_0) \quad (5.19)$$

Cette expression correspond à la somme de deux ondes. La première converge en  $r_1 = r_0$  au temps  $t_1 = T - t_0$ , et s'avère identique à l'onde initiale retournée temporellement. Le deuxième terme correspond à l'onde initiale divergente en opposition de phase : sa présence est due à l'absence de puits acoustique au temps de refocalisation [82].

Dans le domaine de Fourier, la focalisation spatiale est donc définie par

$$\phi^{TR}(\mathbf{r}_1, \omega) = \overline{G}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_0, \omega) - G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_0, \omega) = -2j\Im[G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_0, \omega)] \quad (5.20)$$

où  $\overline{G}$  désigne le complexe conjugué de  $G$ . La tache focale théorique telle que représentée sur la figure 5.2 en trait pointillé est donc obtenue en calculant

$$F_{\mathbf{r}_0}(\mathbf{r}_1) = 20 \log_{10} \frac{|\Im[G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_0, \omega)]|}{|\Im[G(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_0, \omega)]|} \quad (5.21)$$

En milieu homogène, dans un espace de dimension 3, le retournement temporel conduit donc à une tache focale en  $\sin(kr)/kr$ , dont la largeur à mi-hauteur est proche de  $0,60\lambda$ . Dans un espace homogène à 2 dimensions, la tache focale est définie par la partie réelle de la fonction de Hankel d'ordre zéro et de première espèce  $\Re[H_0^{(1)}(kr)]$ , de largeur à mi-hauteur  $\approx 0,48\lambda$  (figure 5.22).

### 5.3.2 Focalisation spatiale dans un cristal phononique

Nous étudions ici un cristal présentant une bande interdite totale, constitué de cylindres rigides de 1 mm de diamètre arrangés sur un réseau carré de période 1,5 mm dans l'air. Nous nous détachons ici volontairement du cristal phononique que nous avons construit pour deux raisons : l'absence de bande interdite totale dans notre échantillon et le gain en temps de calcul quand les diffuseurs sont rigides. Le code self-consistant est plus rapide, puisque la section différentielle de diffusion d'une tige rigide est correctement reproduite à ces fréquences en n'utilisant que les

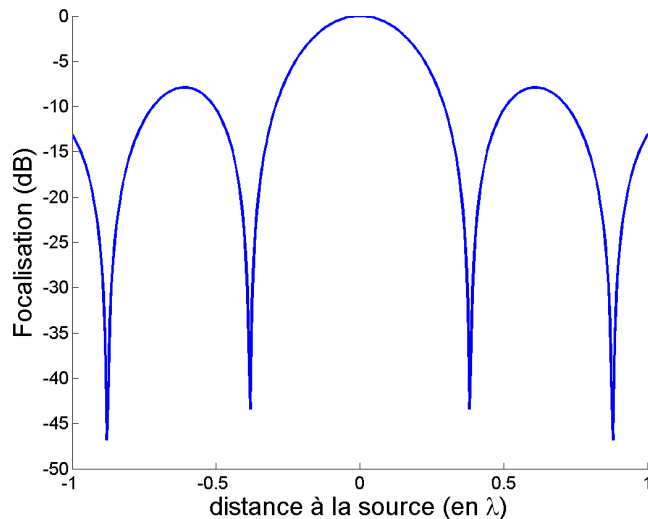


FIG. 5.22 – Focalisation spatiale dans un milieu homogène bidimensionnel. La largeur à mi-hauteur de la tache focale vaut approximativement  $0,48 \lambda$ .

modes mono et dipolaires. De plus, nous avons vu que la méthode d'expansion en ondes planes donnait des résultats plus précis avec des diffuseurs rigides.

Les relations de dispersion dudit cristal font apparaître la bande interdite totale dans la gamme de fréquences comprises entre 127 et 133 kHz (figure 5.23).

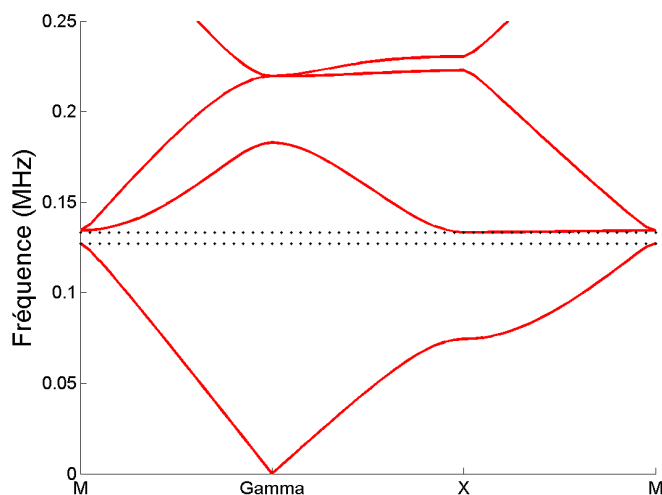


FIG. 5.23 – Relations de dispersion d'un cristal phononique de tiges rigides de 1 mm de diamètre arrangées en réseau carré de période 1,5 mm. Les limites de la bande interdite totale sont matérialisées par les lignes pointillées noirs.

Nous présentons sur la figure 5.24 la focalisation spatiale par retournement temporel à deux fréquences d'intérêt : l'une située en dessous de la bande interdite, dans le régime des grandes longueurs d'ondes (25 kHz), l'autre comprise dans la bande interdite totale (130 kHz).

A 130 kHz, il est impossible de définir la résolution de focalisation du fait de l'existence de lobes secondaires d'amplitude supérieure à celle du point focal. A cette fréquence, le maximum de pression est atteint au sein du cristal dans une couronne centrée sur la source initiale, ce qui

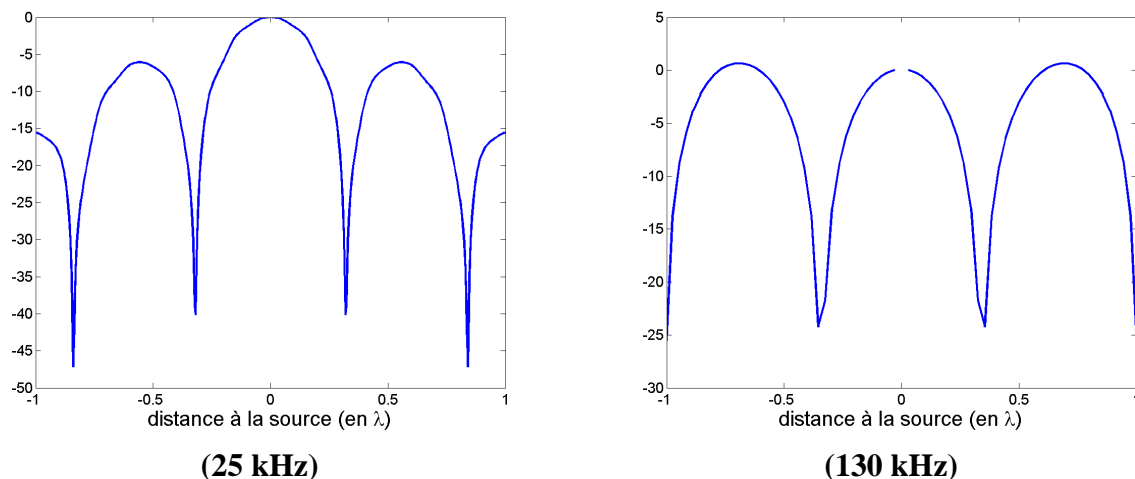


FIG. 5.24 – Focalisation spatiale calculée à l'aide du code self-consistant dans un cristal phononique de 22 x 22 tiges. La fréquence 25 kHz se trouve dans la première bande passante du cristal, tandis que la fréquence 130 kHz est comprise dans la bande interdite totale du cristal.

est le signe de l'incapacité du retournement temporel à maximiser la pression au point focal, du fait de la bande interdite totale.

A 25 kHz, la résolution de focalisation (c'est-à-dire, la largeur à -6 dB de la tache focale) est de  $0.406 \lambda$ , soit 5,36 mm. Cette résolution est meilleure que celle obtenue en milieu homogène de référence (ici l'air) :  $0.482 \lambda$ , soit 6,37 mm. Cette constatation est à rapprocher de la vitesse de phase que l'on peut calculer dans le cristal à l'aide de la PWE. A cette fréquence, la vitesse de phase est presque isotrope dans les directions  $\Gamma X$  et  $\Gamma M$ , et vaut 282 m/s, contre 330 m/s dans l'air. De fait, la longueur d'onde effective est plus faible dans un cristal de cylindres rigides à cette fréquence que la longueur d'onde dans l'air. Le rapport des résolutions (0,84) est comparable au rapport de la vitesse effective au sein du cristal et de la vitesse dans l'air (0,85), ce qui semble confirmer cette hypothèse.

La présence de diffuseurs rigides, donc impénétrables pour les ondes acoustiques, a pour effet de diminuer la longueur d'onde effective, ce qui améliore la résolution de focalisation aux fréquences pour lesquelles le matériau se comporte comme un milieu effectif<sup>\*\*</sup>.

Dans ce cadre, on peut vérifier que l'augmentation de la fraction surfacique des diffuseurs conduit à une résolution de focalisation améliorée. Il est d'ailleurs possible de quantifier cet effet en utilisant par exemple un modèle d'évolution de la vitesse effective proposé par Cervera [22]. Celui-ci prédit une variation de la vitesse effective  $V_{eff}$  telle que  $V_{eff} = V_{air} / \sqrt{1 + f}$  où  $f$  est la fraction surfacique de diffuseurs rigides. Sur la figure 5.25, nous comparons la vitesse de phase prédite par ce modèle avec la vitesse de phase effective prévue par la méthode d'expansion en ondes planes.

<sup>\*\*</sup>L'interprétation physique de ce phénomène est la suivante : les diffuseurs étant rigides, l'onde n'y pénètre pas, ce qui la ralentit en augmentant la tortuosité.

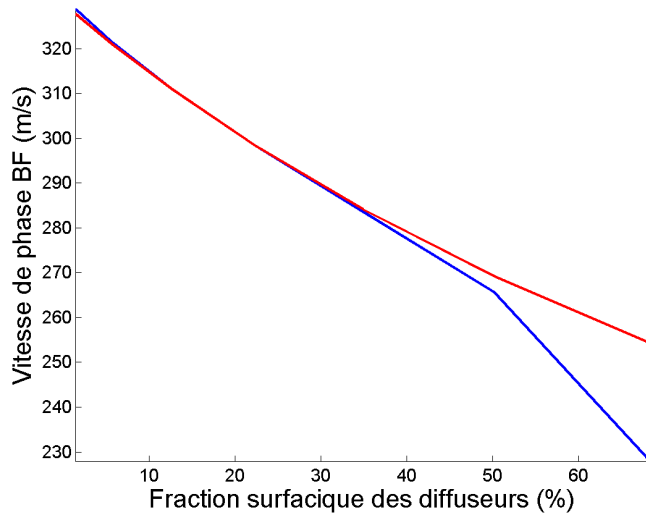


FIG. 5.25 – Evolution de la vitesse de phase "basse fréquence" au sein d'un cristal de diffuseurs rigides dans l'air. En rouge, le modèle de Cervera. En bleu, la vitesse de phase calculée à l'aide de la PWE.

Il faut tout d'abord noter que le modèle de Cervera diverge de la solution exacte pour des fractions surfaciques supérieures à 50 %. L'approximation est en revanche très bonne pour les fractions surfaciques inférieures. De fait, on peut conclure sur la résolution de focalisation par retournement temporel dans un cristal de diffuseurs rigides à basse fréquence : celle-ci augmente en  $\sqrt{1+f}$  pour des fractions surfaciques de diffuseurs  $f$  modérées.

La figure 5.25 nous apprend que l'on ne peut espérer une amélioration de la résolution de focalisation supérieure à 30 % avec un système de diffuseurs rigides. Dans la mesure où l'hypothèse d'une résolution de focalisation liée aux propriétés effectives du milieu autour de la source initiale est valable, on devrait pouvoir constater une "hyperrésolution" bien plus forte dans d'autres types de cristaux. En particulier, un milieu hétérogène dont la vitesse de phase effective est modulable dans une large plage de valeurs semble extrêmement intéressant.

Les nuages de bulles d'air dans l'eau se présentent comme de bons candidats. En effet, à basse fréquence, la compressibilité d'un liquide bulleux est essentiellement celle de l'air, alors que la densité du mélange est proche de celle de l'eau. La loi de Wood, valable à basse fréquence relativement à la fréquence de résonance des bulles, fournit alors une bonne estimation de la vitesse effective pour des fractions volumiques moyennes :  $V_{eff} = 1/\sqrt{f\rho_{eau}\chi_{air}}$  pour  $0,0001 \ll f \ll 1$ . Ainsi, l'addition d'une faible proportion de bulles d'air de taille quelconque dans l'eau suffit à diminuer la vitesse du son de manière spectaculaire : la vitesse effective d'un tel mélange passe de 1500 à 360 m/s pour une fraction volumique de bulles aussi faible que 1 pour mille.

Nous avons pu vérifier la validité de cette approche en calculant la fonction de Green à basse fréquence dans un cristal bidimensionnel de 40x40 cylindres d'air dans l'eau, de rayon  $10\ \mu\text{m}$  et espacés de  $560\ \mu\text{m}$  (soit une fraction surfacique de un pour mille). La résolution de focalisation obtenue avec le code de diffusion multiple est de 16,5 mm à 10 kHz, ce qui correspond à  $0,11\ \lambda$  dans l'eau. La méthode d'expansion en ondes planes nous fournit la vitesse de phase à 10

kHz dans un tel cristal : 360 m/s contre 1500 m/s dans l'eau. La vitesse de phase ainsi calculée est en bon accord avec l'amélioration de la résolution de focalisation observée, ce qui confirme la validité de notre hypothèse, et prouve que les nuages de bulles sont de bons candidats pour observer cet effet d'hyperfocalisation.

Dans ce chapitre, nous avons présenté les premières expériences de retournement temporel en transmission dans des cristaux phononiques. Quand la source initiale se situe en dehors du cristal, nous avons mis en évidence l'absence d'amélioration de la résolution de focalisation, qui était caractéristique du retournement temporel en milieu multiplement diffuseur désordonné. Dans cette même configuration, nous avons également montré qu'il était possible de refocaliser une onde à sa source alors que la "propagation" au sein du cristal est supportée par des ondes évanescentes. Dans ce cadre, nous avons expliqué la diminution de la largeur temporelle caractéristique de la compression temporelle par un élargissement du spectre de fréquences transmises.

Enfin, nous avons simulé la focalisation spatiale au sein de cristaux phononiques à l'aide d'un code de diffusion multiple self-consistant. Alors que la résolution de focalisation est améliorée dans le régime des grandes longueurs d'ondes quand les diffuseurs sont rigides ou très compressibles, celle-ci ne peut être définie au sein de la bande interdite, puisqu'alors, le retournement temporel échoue à maximiser la pression au point focal.



# Bibliographie

- [1] L. P. Solie, “Surface acoustic wave reflective dot array (RDA),” *Applied Physics Letters*, vol. 28, no. 8, pp. 420–422, 1976.
- [2] J. D. Achenbach and M. Kitahara, “Harmonic waves in a solid with a periodic distribution of spherical cavities,” *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 81, no. 3, pp. 595–598, 1987.
- [3] V. Narayanamurti, H. L. Stormer, M. A. Chin, A. C. Gossard, and W. Wiegmann, “Selective transmission of high-frequency phonons by a superlattice : The ”dielectric” phonon filter,” *Physical Review Letters*, vol. 43, no. 27, pp. 2012–2016, 1979.
- [4] E. Yablonovitch, “Inhibited spontaneous emission in solid-state physics and electronics,” *Physical Review Letters*, vol. 58, no. 20, pp. 2059–2062, 1987.
- [5] E. Yablonovitch, T. J. Gmitter, and K. M. Leung, “Photonic band structure : The face-centered-cubic case employing nonspherical atoms,” *Physical Review Letters*, vol. 67, no. 17, pp. 2295–2298, 1991.
- [6] S. John, “Strong localization of photons in certain disordered dielectric superlattices,” *Physical Review Letters*, vol. 58, no. 23, pp. 2486–2489, 1987.
- [7] S. John and R. Rangarajan, “Optimal structures for classical wave localization : an alternative to the Ioffe-Regel criterion,” *Physical Review B*, vol. 38, pp. 10101–10104, 1988.
- [8] E. N. Economou and A. Zdetsis, “Classical wave propagation in periodic structures,” *Physical Review B*, vol. 40, no. 2, pp. 1334–1337, 1989.
- [9] M. S. Kushwaha, P. Halevi, L. Dobrzynski, and B. Djafari-Rouhani, “Acoustic band structure of periodic elastic composites,” *Physical Review Letters*, vol. 71, no. 13, pp. 2022–2025, 1993.
- [10] M. S. Kushwaha, “Stop-bands for periodic metallic rods : Sculptures that can filter the noise,” *Applied Physics Letters*, vol. 70, no. 24, pp. 3218–3220, 1997.
- [11] G. Tayeb, B. Gralak, and S. Enoch, “Structural colors in nature and butterfly-wing modeling,” *Optics and Photonics News*, pp. 38–43, 2003.
- [12] A. R. Parker, R. C. McPhedran, D. R. McKenzie, L. C. Botten, and N.-A. P. Nicorovici, “Aphrodite’s iridescence,” *Nature*, vol. 409, pp. 36–37, 2001.
- [13] J. O. Vasseur, B. Djafari-Rouhani, L. Dobrzynski, M. S. Kushwaha, and P. Halevi, “Complete acoustic band gaps in periodic fibre reinforced composite materials : the carbon/epoxy composite and some metallic systems,” *Journal of Physics : Condensed Matter*, vol. 6, no. 42, pp. 8759–8770, 1994.
- [14] D. Caballero, J. Sanchez-Dehesa, C. Rubio, R. Martinez-Sala, J. V. Sanchez-Pérez, F. Mesguier, and J. Llinares, “Large two-dimensional sonic band gaps,” *Physical Review E*, vol. 60, no. 6, pp. R6316–R6319, 1999.



- [15] E. N. Economou and M. M. Sigalas, "Classical wave propagation in periodic structures : Cermet versus network topology," *Physical Review B*, vol. 48, no. 18, pp. 13434–13438, 1993.
- [16] E. N. Economou and M. Sigalas, "Stop bands for elastic waves in periodic composite materials," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 95, no. 4, pp. 1734–1740, 1994.
- [17] M. S. Kushwaha and P. Halevi, "Band-gap engineering in periodic elastic composites," *Applied Physics Letters*, vol. 64, no. 9, pp. 1085–1087, 1994.
- [18] Z. Liu, X. Zhang, Y. Mao, Y. Y. Zhu, Z. Yang, C. T. Chan, and P. Sheng, "Locally resonant sonic materials," *Science*, vol. 289, no. 5485, pp. 1734–1736, 2000.
- [19] G. Wang, X. Wen, J. Wen, L. Shao, and Y. Liu, "Two-dimensional locally resonant phononic crystals with binary structures," *Physical Review Letters*, vol. 93, no. 15, p. 154302, 2004.
- [20] G. Wang, D. Yua, J. Wen, Y. Liu, and X. Wen, "One-dimensional phononic crystals with locally resonant structures," *Physics Letters A*, vol. 327, pp. 512–521, 2004.
- [21] C. Goffaux and J. P. Vigneron, "Theoretical study of a tunable phononic band gap system," *Physical Review B*, vol. 64, no. 7, p. 075118, 2001.
- [22] F. Cervera, L. Sanchis, J. V. Sanchez-Perez, R. Martinez-Sala, C. Rubio, F. Meseguer, C. Lopez, D. Caballero, and J. Sanchez-Dehesa, "Refractive acoustic devices for airborne sound," *Physical Review Letters*, vol. 88, no. 2, p. 023902, 2002.
- [23] N. Garcia, M. Nieto-Vesperinas, E. V. Ponizovskaya, and M. Torres, "Theory for tailoring sonic devices : Diffraction dominates over refraction," *Physical Review E (Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics)*, vol. 67, no. 4, p. 046606, 2003.
- [24] S. Yang, J. H. Page, Z. Liu, M. L. Cowan, C. T. Chan, and P. Sheng, "Focusing of sound in a 3D phononic crystal," *Physical Review Letters*, vol. 93, no. 2, p. 024301, 2004.
- [25] V. G. Veselago, "The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of epsilon and mu," *Soviet Physics*, vol. 10, pp. 509–514, 1968.
- [26] J. B. Pendry, "Negative refraction makes a perfect lens," *Physical Review Letters*, vol. 85, pp. 3966–3969, 2000.
- [27] J. H. Page, A. Sukhovich, S. Yang, M. L. Cowan, F. Van Der Biest, A. Tourin, M. Fink, Z. Liu, C. T. Chan, and P. Sheng, "Phononic crystals," *physica status solidi (b)*, vol. 241, no. 15, pp. 3454–3462, 2004.
- [28] M. Torres, F. R. M. de Espinosa, D. García-Pablos, and N. García, "Sonic band gaps in finite elastic media : Surface states and localization phenomena in linear and point defects," *Physical Review Letters*, vol. 82, no. 15, pp. 3054–3057, 1999.
- [29] M. Kafesaki, M. M. Sigalas, and N. García, "Frequency modulation in the transmittivity of wave guides in elastic-wave band-gap materials," *Physical Review Letters*, vol. 85, no. 19, pp. 4044–4047, 2000.
- [30] M. Torres, F. R. M. de Espinosa, and J. L. Aragon, "Ultrasonic wedges for elastic wave bending and splitting without requiring a full band gap," *Physical Review Letters*, vol. 86, no. 19, pp. 4282–4285, 2001.
- [31] M. M. Sigalas and N. Garcia, "Theoretical study of three dimensional elastic band gaps with the finite-difference time-domain method," *Journal of Applied Physics*, vol. 87, no. 6, pp. 3122–3125, 2000.

- [32] A. Khelif, B. Djafari-Rouhani, J. O. Vasseur, and P. A. Deymier, "Transmission and dispersion relations of perfect and defect-containing waveguide structures in phononic band gap materials," *Physical Review B (Condensed Matter and Materials Physics)*, vol. 68, no. 2, p. 024302, 2003.
- [33] A. Khelif, A. Choujaa, S. Benchabane, B. Djafari-Rouhani, and V. Laude, "Guiding and bending of acoustic waves in highly confined phononic crystal waveguides," *Applied Physics Letters*, vol. 84, no. 22, pp. 4400–4402, 2004.
- [34] S. Yang, J. H. Page, Z. Liu, M. L. Cowan, C. T. Chan, and P. Sheng, "Ultrasound tunneling through 3D phononic crystals," *Physical Review Letters*, vol. 88, no. 10, p. 104301, 2002.
- [35] F. Van Der Biest, A. Sukhovich, A. Tourin, J. H. Page, B. A. van Tiggelen, Z. Liu, and M. Fink, "Resonant tunneling of acoustic waves through a double barrier consisting of two phononic crystals," *Europhysics Letters*, vol. 71, no. 1, pp. 63–69, 2005.
- [36] C. Luo, S. G. Johnson, J. D. Joannopoulos, and J. B. Pendry, "All-angle negative refraction without negative effective index," *Physical Review B (Condensed Matter and Materials Physics)*, vol. 65, no. 20, p. 201104, 2002.
- [37] A. Hache and L. Poirier, "Anomalous dispersion and superluminal group velocity in a co-axial photonic crystal : Theory and experiment," *Physical Review E (Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics)*, vol. 65, no. 3, p. 036608, 2002.
- [38] S. Yang, *Ultrasonic Properties of Phononic Crystals*. PhD thesis, Hong Kong University of Science and Technology, february 2002.
- [39] T. E. Hartman, "Tunneling of a wave packet," *Journal of Applied Physics*, vol. 33, no. 12, pp. 3427–3433, 1962.
- [40] A. Imhof, W. L. Vos, R. Sprik, and A. Lagendijk, "Large dispersive effects near the band edges of photonic crystals," *Physical Review Letters*, vol. 83, no. 15, pp. 2942–2945, 1999.
- [41] L. D. Negro, C. J. Oton, Z. Gaburro, L. Pavesi, P. Johnson, A. Lagendijk, R. Righini, M. Colocci, and D. S. Wiersma, "Light transport through the band-edge states of fibonacci quasicrystals," *Physical Review Letters*, vol. 90, no. 5, p. 055501, 2003.
- [42] A. M. Steinberg, P. G. Kwiat, and R. Y. Chiao, "Measurement of the single-photon tunneling time," *Physical Review Letters*, vol. 71, no. 5, pp. 708–711, 1993.
- [43] Y. Japha and G. Kurizki, "Superluminal delays of coherent pulses in nondissipative media : A universal mechanism," *Physical Review A*, vol. 53, pp. 586–590, 1996.
- [44] M. Buttiker and S. Washburn, "Ado about nothing much?," *Nature*, vol. 422, no. 6929, pp. 271–272, 2003.
- [45] W. M. Robertson, J. Ash, and J. M. McGaugh, "Breaking the sound barrier : Tunneling of acoustic waves through the forbidden transmission region of a one-dimensional acoustic band gap array," *American Journal of Physics*, vol. 70, no. 7, pp. 689–693, 2002.
- [46] H. G. Winful, "Mechanism for 'superluminal' tunnelling," *Nature*, vol. 424, no. 6949, p. 638, 2003.
- [47] C. Spielmann, R. Szipocs, A. Stingl, and F. Krausz, "Tunneling of optical pulses through photonic band gaps," *Physical Review Letters*, vol. 73, no. 17, pp. 2308–2311, 1994.
- [48] H. G. Winful, "Nature of 'superlumina' barrier tunneling," *Physical Review Letters*, vol. 90, no. 2, p. 023901, 2003.

- [49] H. G. Winful, "Energy storage in superluminal barrier tunneling : Origin of the hartman effect," *Optics Express*, vol. 10, pp. 1491–1496, 2002.
- [50] L. M. Brekhovskikh, *Waves in layered media*. Academic Press, New York, 1960.
- [51] T. L. Loucks, *Augmented Plane Wave Method*. W. A. Benjamin, 1967.
- [52] M. S. Kushwaha, P. Halevi, G. Martínez, L. Dobrzynski, and B. Djafari-Rouhani, "Theory of acoustic band structure of periodic elastic composites," *Physical Review B*, vol. 49, no. 4, pp. 2313–2322, 1994.
- [53] M. Kafesaki and E. N. Economou, "Multiple-scattering theory for three-dimensional periodic acoustic composites," *Physical Review B*, vol. 60, no. 17, pp. 11993–12001, 1999.
- [54] A. Wood, *A Textbook of Sound*. London, 1932.
- [55] A. A. Krokhin, J. Arriaga, and L. N. Gumen, "Speed of sound in periodic elastic composites," *Physical Review Letters*, vol. 91, no. 26, p. 264302, 2003.
- [56] J. V. Sánchez-Pérez, D. Caballero, R. Martínez-Sala, C. Rubio, J. Sánchez-Dehesa, F. Mesguier, J. Llinares, and F. Gálvez, "Sound attenuation by a two-dimensional array of rigid cylinders," *Physical Review Letters*, vol. 80, no. 24, pp. 5325–5328, 1998.
- [57] Y. Cao, Z. Hou, and Y. Liu, "Convergence problem of plane-wave expansion method for phononic crystals," *Physics Letters A*, vol. 327, no. 2-3, pp. 247–253, 2004.
- [58] C. Qiu, Z. Liu, J. Mei, and M. Ke, "The layer multiple-scattering method for calculating transmission coefficients of 2D phononic crystals," *Solid State Communications*, vol. 134, pp. 765–770, 2005.
- [59] Y.-Y. Chen and Z. Ye, "Theoretical analysis of acoustic stop bands in two-dimensional periodic scattering arrays," *Physical Review E*, vol. 64, no. 3, p. 036616, 2001.
- [60] Z. Liu, C. T. Chan, P. Sheng, A. L. Goertzen, and J. H. Page, "Elastic wave scattering by periodic structures of spherical objects : Theory and experiment," *Physical Review B*, vol. 62, no. 4, pp. 2446–2457, 2000.
- [61] I. E. Psarobas, N. Stefanou, and A. Modinos, "Scattering of elastic waves by periodic arrays of spherical bodies," *Physical Review B*, vol. 62, no. 1, pp. 278–291, 2000.
- [62] A. Derode, M. Tanter, L. Sandrin, A. Tourin, and M. Fink, "Numerical and experimental time-reversal of acoustic waves in random media," *Journal of Computational Acoustics*, vol. 9, no. 3, pp. 993–1003, 2001.
- [63] C. Draeger and M. Fink, "One-channel time reversal of elastic waves in a chaotic 2D-silicon cavity," *Physical Review Letters*, vol. 79, no. 3, pp. 407–410, 1997.
- [64] M. Tanter, J.-L. Thomas, and M. Fink, "Focusing and steering through absorbing and aberrating layers : Application to ultrasonic propagation through the skull," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 103, no. 5, pp. 2403–2410, 1998.
- [65] P. Roux, J. de Rosny, M. Tanter, and M. Fink, "The Aharonov-Bohm effect revisited by an acoustic time-reversal mirror," *Physical Review Letters*, vol. 79, no. 17, pp. 3170–3173, 1997.
- [66] B. Temelkuran, E. Ozbay, M. Sigalas, G. Tuttle, C. Soukoulis, and K. Ho, "Reflection properties of metallic photonic crystals," *Applied Physics A*, vol. 66, pp. 363–365, 1998.
- [67] A. A. Asatryan, K. Busch, R. C. McPhedran, L. C. Botten, C. M. de Sterke, and N. A. Nicorovici, "Two-dimensional Green's function and local density of states in photonic crystals consisting of a finite number of cylinders of infinite length," *Physical Review E (Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics)*, vol. 63, no. 4, p. 046612, 2001.

- [68] M. Fink, "Time reversal of ultrasonic fields. I. basic principles," *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, vol. 39, no. 5, pp. 555–566, 1992.
- [69] F. Wu, J.-L. Thomas, and M. Fink, "Time reversal of ultrasonic fields. II. experimental results," *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, vol. 39, no. 5, pp. 567–578, 1992.
- [70] D. Cassereau and M. Fink, "Time-reversal of ultrasonic fields. III. theory of the closed time-reversal cavity," *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, vol. 39, no. 5, pp. 579–592, 1992.
- [71] G. Lerosey, J. de Rosny, A. Tourin, A. Derode, G. Montaldo, and M. Fink, "Time reversal of electromagnetic waves," *Physical Review Letters*, vol. 92, no. 19, p. 193904, 2004.
- [72] R. K. Snieder and J. A. Scales, "Time-reversed imaging as a diagnostic of wave and particle chaos," *Physical Review E*, vol. 58, pp. 5668–5675, 1998.
- [73] A. Derode, P. Roux, and M. Fink, "Robust acoustic time reversal with high-order multiple scattering," *Physical Review Letters*, vol. 75, no. 23, pp. 4206–4209, 1995.
- [74] A. Derode, *La cohérence des ondes ultrasonores en milieu hétérogène*. Thèse de doctorat, Université Paris 7 - Denis Diderot, 1994.
- [75] A. Derode, A. Tourin, and M. Fink, "Ultrasonic pulse compression with one-bit time reversal through multiple scattering," *Journal of Applied Physics*, vol. 85, no. 9, pp. 6343–6352, 1999.
- [76] A. Derode, A. Tourin, and M. Fink, "One-bit time reversal through high-order multiple scattering media," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 105, no. 2, pp. 955–955, 1999.
- [77] G. Montaldo, P. Roux, A. Derode, C. Negreira, and M. Fink, "Generation of very high pressure pulses with 1-bit time reversal in a solid waveguide," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 110, no. 6, pp. 2849–2857, 2001.
- [78] A. Derode, A. Tourin, and M. Fink, "Random multiple scattering of ultrasound. II. is time reversal a self-averaging process?," *Physical Review E (Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics)*, vol. 64, no. 3, p. 036606, 2001.
- [79] A. Derode, A. Tourin, and M. Fink, "Random multiple scattering of ultrasound. I. coherent and ballistic waves," *Physical Review E (Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics)*, vol. 64, no. 3, p. 036605, 2001.
- [80] A. Tourin, *Diffusion Multiple et Renversement du Temps des Ondes Ultrasonores*. Thèse de doctorat, Université Paris VII, 1999.
- [81] M. Fink, W. Kuperman, J.-P. Montagner, and A. Tourin, *Imaging of complex media with acoustic and seismic waves*. Springer, 2002.
- [82] J. de Rosny and M. Fink, "Overcoming the diffraction limit in wave physics using a time-reversal mirror and a novel acoustic sink," *Physical Review Letters*, vol. 89, no. 12, p. 124301, 2002.



## **Deuxième partie**

### **Nuages de bulles**



Nous abordons la partie de mon travail qui concerne la propagation acoustique dans les milieux hétérogènes désordonnés que sont les nuages de bulles. L'objectif initialement fixé était d'étudier le régime de diffusion multiple non-linéaire. Les bulles se sont imposées comme milieu d'étude modèle, même si cela posait certaines difficultés, notamment en termes de caractérisation du milieu de propagation.

De nombreux articles théoriques et numériques traitent de la diffusion multiple dans les nuages de bulles. Ceux-ci se classent en trois grandes catégories : suivant l'exemple de Foldy [1], beaucoup s'attachent à obtenir une relation de dispersion du mélange diphasique avec une précision améliorée [2, 3, 4, 5]. Le développement des codes de calcul numérique adaptés à des répartitions périodiques de diffuseurs a amené d'autres auteurs à s'intéresser au cas de bulles ordonnées sur un réseau périodique [6, 7, 8, 9, 10]. Notons que pour des longueurs d'onde grandes devant la distance moyenne entre bulles, un échantillon de bulles ordonné et un échantillon de bulles désordonné se comportent de manière identique. Enfin, certains articles envisagent et prédisent la possibilité d'observer le régime de localisation forte au sein de nuages de bulles [11, 12, 13, 14].

A l'image d'une publication récente de M. Kafesaki [15], nombre de ces articles présentent les nuages de bulles comme les candidats idéaux pour étudier le régime de diffusion multiple et même pour observer la localisation d'Anderson. Nous verrons en effet que les bulles sont des diffuseurs résonants très efficaces dont la section efficace de diffusion peut dépasser de plusieurs ordres de grandeur la section efficace géométrique [16].

En comparaison, les études expérimentales sont plutôt rares, probablement en raison de la difficile maîtrise des conditions expérimentales. A titre d'illustration, citons les travaux de Silberman en 1957, portant sur l'atténuation et la vitesse de phase dans un nuage de bulles [17], dont les résultats sont encore utilisés pour tester la validité des modèles de propagation de l'onde cohérente [3].

A notre connaissance, peu d'études expérimentales de la diffusion multiple dans les nuages de bulles ont été menées, encore moins en régime non-linéaire. Certains auteurs éliminent d'ailleurs cette dernière possibilité [6].

Au Laboratoire Ondes et Acoustique, des techniques ont été développées qui permettent de mesurer les paramètres de transport de l'onde acoustique en régime de diffusion multiple [18, 19]. Celles-ci ont été appliquées avec succès à des échantillons désordonnés modèles tels que des forêts de tiges d'acier dans l'eau, mais également dans des milieux réels tels que l'os trabéculaire, ainsi que les aciers à grains [20]. En particulier, la thèse d'Arnaud Tourin a montré qu'il était possible de mesurer les différents libres parcours moyens (élastique, absorption, transport) ainsi que la constante de diffusion, qui caractérisent la propagation des intensités cohérentes et incohérentes dans un milieu désordonné [21].

Dans ce contexte, le but de ma thèse était dans un premier temps de créer un nuage de bulles de caractéristiques stables et reproductibles dans l'objectif d'étudier le régime de diffusion multiple non-linéaire aux fréquences de travail habituelles du laboratoire. Le deuxième objectif était



de caractériser physiquement et acoustiquement le milieu ainsi créé, notamment en termes de distribution de rayons, fraction volumique et libre parcours moyen.

# Chapitre 1

## Diffusion multiple et nuages de bulles

Dans ce chapitre, nous introduisons tout d'abord le concept de diffusion multiple en présentant le calcul du libre parcours moyen dans un milieu hétérogène dilué. Dans ce cadre, nous verrons que les propriétés d'un milieu multidiffuseur reposent sur les sections efficaces de diffusion et d'absorption des diffuseurs, ainsi que sur leur concentration.

Ceci nous amènera naturellement à étudier les oscillations d'une bulle en régime linéaire puis non-linéaire.

Nous décrirons ensuite le dispositif expérimental que nous avons mis en place pour étudier la diffusion multiple en régime non-linéaire dans les nuages de bulles.

### 1.1 Libre parcours moyen

Lorsqu'une onde rencontre une collection de diffuseurs localisés dans l'espace, on distingue deux régimes de propagation de l'énergie, selon la distance que parcourt l'onde dans le milieu\*.

Nous introduisons ici la distance qui caractérise la transition entre ces deux régimes.

Quand la concentration des diffuseurs est suffisamment importante ou quand les dimensions d'un échantillon diffuseur augmentent, la probabilité qu'une onde diffusée une première fois le soit à nouveau est grande. Il est donc très difficile de prédire les champs transmis et rétrodiffusés, et l'on peut alors s'intéresser au champ moyenné sur le désordre que l'on appelle **onde cohérente**.

Dans un milieu multiplement diffuseur, l'amplitude  $\langle G(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \rangle$  de l'onde cohérente est régie par l'équation de Dyson [22] :

$$\langle G(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \rangle = G_0(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}_0) + \int \int G_0(\omega, \mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \Sigma(\omega, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \langle G(\omega, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_0) \rangle d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \quad (1.1)$$

où  $\Sigma$  est un opérateur invariant par translation appelé **énergie propre**, et  $G_0$  est solution de

---

\*voire trois régimes, si l'on prend en compte le régime de localisation d'Anderson.

l'équation de propagation en l'absence de diffuseurs :

$$(\Delta + k_0^2)G_0(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \quad (1.2)$$

Pour évaluer le champ cohérent, il est intéressant d'écrire la relation self-consistante 1.1 dans l'espace des vecteurs d'onde. Par transformée de Fourier spatiale, on obtient alors :

$$\langle G(\omega, \mathbf{k}) \rangle = G_0(\omega, \mathbf{k}) + G_0(\omega, \mathbf{k})\Sigma(\omega, \mathbf{k}) \langle G(\omega, \mathbf{k}) \rangle \quad (1.3)$$

La fonction de Green en champ libre  $G_0$  est solution de 1.2, et se calcule également par transformée de Fourier spatiale :

$$G_0(\omega, \mathbf{k}) = \frac{1}{k_0^2(\omega) - k^2} \quad (1.4)$$

On obtient alors simplement l'amplitude de l'onde cohérente :

$$\langle G(\omega, \mathbf{k}) \rangle = \frac{1}{k_0^2(\omega) - \Sigma(\omega, \mathbf{k}) - k^2} \quad (1.5)$$

Si  $\Sigma(\omega, \mathbf{k})$  devient indépendant de  $\mathbf{k}$ , cette expression est identique à la fonction de Green dans un milieu homogène de relation de dispersion  $k_e = \sqrt{k_0^2(\omega) - \Sigma(\omega)}$ .

L'onde cohérente se déplace donc dans un milieu effectif homogène de vitesse et d'atténuation renormalisées. L'intensité cohérente  $|\langle G(\omega, \mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \rangle|^2$  décroît sur une longueur caractéristique  $1/2\Im(k_e)$ , quantité que l'on appelle **libre parcours moyen élastique**.

Nous cherchons maintenant à exprimer le libre parcours moyen élastique en fonction des paramètres macroscopiques de l'échantillon. Au moyen de la relation de dispersion du milieu effectif, on peut tout d'abord calculer  $\Im(k_e)$  :

$$\Im(k_e) = \frac{-\Im(\Sigma)}{2\Re(k_e)} \approx \frac{-\Im(\Sigma)}{2k_0} \quad (1.6)$$

Ensuite, quand la concentration en diffuseurs  $n$  est faible<sup>†</sup>, l'*Independent Scattering Approximation* (ISA) s'applique, et conduit à une énergie propre indépendante de  $\mathbf{k}$ .

On peut alors exprimer  $\Sigma$  en fonction de l'amplitude diffusée vers l'avant par un diffuseur unique (notée  $t_{\mathbf{k},\mathbf{k}}$ , où  $t$  est la matrice de diffusion d'un diffuseur) :

$$\Sigma(\omega, \mathbf{k}) = nt_{\mathbf{k},\mathbf{k}} \quad (1.7)$$

Les relations 1.7 et 1.6 nous permettent alors de calculer le libre parcours moyen élastique  $l_e$  :

$$l_e = \frac{1}{2\Im(k_e)} = \frac{-k_0}{n\Im(t_{\mathbf{k},\mathbf{k}})} \quad (1.8)$$

---

<sup>†</sup>on admet classiquement comme limite une fraction volumique de 10 %.

Le théorème optique relie la section efficace de diffusion  $\sigma_T$  d'un diffuseur unique à la partie imaginaire de l'amplitude diffusée vers l'avant, et nous permet d'obtenir une expression de  $\Im(t_{\mathbf{k},\mathbf{k}})$  :

$$\sigma_T = -\frac{\Im(t_{\mathbf{k},\mathbf{k}})}{k_0} \quad (1.9)$$

Dans le cadre de l'*Independent Scattering Approximation*, le libre parcours moyen élastique s'exprime donc simplement en fonction de la concentration  $n$  en diffuseurs et de la section efficace totale de diffusion  $\sigma_T$  d'un diffuseur :

$$l_e = \frac{1}{n\sigma_T} \quad (1.10)$$

$l_e$  est homogène à une distance et peut s'interpréter comme une longueur caractéristique d'extinction de l'amplitude de l'onde cohérente, c'est-à-dire une distance au bout de laquelle environ un tiers de l'énergie incidente continue à se propager de façon balistique, le reste ayant servi à la création des ondes multiples diffusées. Au-delà de quelques libres parcours moyens, l'onde cohérente s'est éteinte et l'énergie se propage en obéissant à une loi de diffusion pour une épaisseur importante<sup>‡</sup>.

Notons enfin qu'en présence d'un désordre suffisant, un troisième régime de diffusion multiple apparaît, dit de localisation forte. Dans ce régime, la constante de diffusion de l'énergie est nulle en milieu infini. Pour un échantillon d'épaisseur finie, l'intensité moyenne transmise décroît exponentiellement sur une distance caractéristique  $\xi(\omega)$ , dite **longueur de localisation**.

Ce régime de diffusion multiple a été maintes fois prédit dans les nuages de bulles [11, 12, 13], mais jamais encore mis en évidence expérimentalement.

Il existe également une longueur caractéristique liée à l'absorption introduite par le milieu de propagation. Il s'agit du libre parcours moyen d'absorption, noté  $l_a$ . Cette longueur est associée aux éventuels processus de conversion d'énergie acoustique (induits par la viscosité, par exemple). Pour qu'il existe un régime de diffusion multiple dans un milieu hétérogène, le libre parcours moyen élastique doit être petit devant le libre parcours moyen d'absorption. Dans le cas contraire, les ondes sont plus probablement absorbées que diffusées.

Quand on s'intéresse à un milieu hétérogène, il est donc essentiel de déterminer les libres parcours moyens élastique et d'absorption afin de choisir le bon mode de description du régime de diffusion.

---

<sup>‡</sup>Des études expérimentales ont montré que la frontière entre le régime propagatif et le régime diffusif n'était pas aussi marquée, puisque l'on peut retrouver des traces de l'onde cohérente jusqu'à des distances de  $15 l_e$  [21].

## 1.2 Etude d'une bulle

La grande différence de compressibilité entre l'air et l'eau fait de la bulle un diffuseur résonant très efficace. Quand une bulle résonne en mode monopolaire, sa section efficace de diffusion peut dépasser de plusieurs ordres de grandeur la section efficace géométrique. Une collection de bulles résonantes semble donc un bon candidat pour étudier la diffusion multiple. Des effets non-linéaires de génération d'harmoniques peuvent également apparaître autour de la résonance.

Dans cette section, nous posons les équations de base du système oscillant complexe qu'est la bulle.

### 1.2.1 Résonance

L'équation du mouvement d'une bulle a été établie pour la première fois par Minnaert en 1933. Il montre que la fréquence de résonance  $\nu_M$  d'une bulle idéale est donnée par la relation :

$$\omega_M = 2\pi\nu_M = \sqrt{\frac{3\gamma P_0}{\rho R_0^2}} \quad (1.11)$$

où  $\gamma$  est le rapport des chaleurs spécifiques de l'air,  $P_0$  est la pression hydrostatique au niveau de la bulle,  $\rho$  la masse volumique de l'eau et  $R_0$  le rayon d'équilibre de la bulle.

Cette équation relie simplement le rayon de la bulle à sa fréquence d'oscillation. Dans les conditions usuelles d'une expérience de laboratoire, on peut en effet vérifier que  $\nu_M R_0 = 3,26$  avec  $\nu_M$  en kHz et  $R_0$  en mm.

A la résonance, la longueur d'onde du champ acoustique est donc très supérieure à son rayon<sup>§</sup>, ce qui justifie l'uniformité de la pression dans tout le voisinage de la bulle.

Devin précise le raisonnement de Minnaert et inclut les processus de dissipation radiatifs, visqueux et thermiques dans l'équation du mouvement de la bulle [23] via un terme d'amortissement  $b\dot{V}$  :

$$m\ddot{V} + b\dot{V} + kV = -Pe^{i\omega t} \quad (1.12)$$

où  $V$  est la variation du volume de la bulle relativement à l'équilibre et  $P$  la pression acoustique appliquée. Le coefficient  $m$  ( $= \rho/4\pi R_0$ ) est appelé **masse inertielle** de la bulle, et  $k$  ( $= 3\gamma P_0/4\pi R_0^3$ ) est la **raideur adiabatique** de la bulle. On retrouve alors la pulsation de Minnaert  $\omega_M$  dans l'expression  $\sqrt{k/m}$ .

Si l'on suppose que le volume de la bulle subit des oscillations harmoniques telles que

---

<sup>§</sup>  $\lambda_M \approx 500R_0$

$V = \Re(\underline{V}e^{i\omega t})$ , la substitution dans l'équation 1.12 donne :

$$\underline{V} = \frac{-P/(m\omega^2)}{\left(\frac{\omega_M^2}{\omega^2} - 1\right) + i\frac{b}{m\omega}} \quad (1.13)$$

On peut alors identifier la partie imaginaire du dénominateur à une constante d'amortissement  $\delta$ , avec ses composantes radiative  $\delta^{rad}$ , thermique  $\delta^{th}$  et visqueuse  $\delta^{vis}$  :

$$\frac{b}{m\omega} = \frac{\Gamma}{\omega} = \delta = \delta^{rad} + \delta^{th} + \delta^{vis} \quad (1.14)$$

En toute rigueur, la pulsation de résonance d'une bulle réelle diffère de  $\omega_M$ . Dans son expression, Minnaert suppose en effet que l'équation d'état de l'air de la bulle est adiabatique, ce qui n'est pas toujours vérifié.

Les échanges thermiques entre l'air d'une bulle et l'eau qui l'entoure ont lieu sur une longueur caractéristique  $l_D = \sqrt{D/2\omega}$ , que l'on appelle **longueur de pénétration thermique**,  $D$  étant le coefficient de diffusion thermique. Pour une bulle de rayon  $R_0$  grand devant  $l_D$ , le gaz se comporte bien de manière adiabatique. Dans le cas contraire, l'équation d'état du gaz est isotherme. On comprend donc la nécessité d'utiliser un exposant polytropique  $\kappa$  en lieu et place du coefficient adiabatique  $\gamma$  utilisé par Minnaert pour établir l'expression de la fréquence de résonance ( $1 < \kappa < \gamma$ ).

Il faut également prendre en compte la tension de surface à l'interface air/eau, dont l'effet est d'augmenter la raideur de la bulle pour les plus petits rayons.

Echanges thermiques et tension de surface ont des effets contraires, et doivent être inclus dans la modélisation d'une bulle dès que celle-ci a un rayon inférieur à quelques centaines de microns. Un modèle complet de la dynamique de la bulle [16] conduit alors à une pulsation de résonance  $\omega_0$  telle que :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\kappa g}{\gamma}} \omega_M \quad (1.15)$$

avec

$$\frac{\gamma}{\kappa} = 1 + \frac{3(\gamma - 1)}{R_0/l_D} \frac{\sinh(R_0/l_D) - \sin(R_0/l_D)}{\cosh(R_0/l_D) - \cos(R_0/l_D)} \quad (1.16)$$

$$\text{et } g = 1 + \frac{2\sigma}{P_0 R_0} - \frac{2\sigma}{3\kappa P_0 R_0} \quad \text{où } \sigma \text{ est la tension de surface.} \quad (1.17)$$

Dans l'expression 1.14, les trois composantes de la constante d'amortissement  $\delta$  dépendent de la fréquence, et Devin en donne une expression [23], que Leighton reprend dans son ouvrage

de référence :

$$\delta^{rad} = \frac{\omega R_0}{c}, \quad \delta^{vis} = \frac{4\eta}{\rho R_0^2 \omega} \quad \text{où } \eta \text{ est le coefficient de viscosité dynamique.}$$

$$\delta^{th} = \left( \frac{\sinh(R_0/l_D) + \sin(R_0/l_D)}{\cosh(R_0/l_D) - \cos(R_0/l_D)} - \frac{2l_D}{R_0} \right) / \left( \frac{R_0/l_D}{3(\gamma - 1)} + \frac{\sinh(R_0/l_D) - \sin(R_0/l_D)}{\cosh(R_0/l_D) - \cos(R_0/l_D)} \right)$$

Nous représentons sur la figure 1.1 l'évolution des différents coefficients d'amortissement à la résonance en fonction du rayon de la bulle.

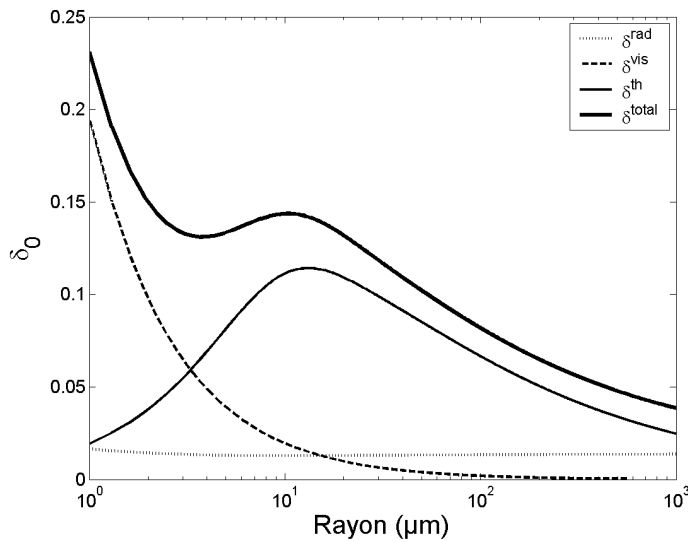


FIG. 1.1 – Les trois composantes de la constante d'amortissement (radiative, thermique et visqueuse) à la résonance en fonction du rayon de la bulle.

Alors que le terme d'amortissement radiatif à la résonance est constant sur toute la plage de rayons considérée, remarquons que la somme des coefficients d'amortissement thermiques et visqueux à la résonance est importante pour les bulles de petits rayons.

### 1.2.2 Sections efficaces

Sous l'influence d'un champ acoustique incident, une bulle absorbe de l'énergie, qu'elle dissipe et rayonne dans toutes les directions. Pour quantifier la diffusion et la perte d'énergie du flux incident à chaque fréquence, on introduit les sections efficaces totales de diffusion  $\sigma_{diff}$  et d'absorption  $\sigma_{abs}$ .

La section efficace totale de diffusion (resp. d'absorption) est donnée par le rapport  $\langle \dot{W} \rangle / I_{inc}$  entre l'énergie rayonnée (resp. dissipée) sur un cycle et l'intensité de l'onde incidente. Ainsi, une onde se propageant sur une distance  $z$  dans un milieu contenant  $n$  bulles identiques par unité de volume verra son intensité décroître d'un facteur  $\exp(-n\sigma_{ext}z)$  où  $\sigma_{ext} = \sigma_{diff} + \sigma_{abs}$  est la section efficace d'extinction d'une bulle.

Une bulle oscille et rayonne dans le liquide ; à la distance  $r$  de celle-ci, la pression acoustique est donnée par [24] :

$$p(r) = \frac{\rho e^{-ikr}}{4\pi r} \ddot{V} = \frac{\rho \omega^2}{4\pi} V \frac{e^{i(\omega t - kr)}}{r} \quad (1.18)$$

De cette relation, nous tirons tout d'abord la fonction de diffusion  $f(R_0, \omega)$  d'une bulle, puis la section efficace de diffusion  $\sigma_{diff}(R_0, \omega)$  :

$$f(R_0, \omega) = \frac{\rho/(4\pi m)}{(\omega_0^2/\omega^2 - 1) + i\delta} = \frac{R_0}{(\omega_0^2/\omega^2 - 1) + i\delta} \quad (1.19)$$

$$\sigma_{diff}(R_0, \omega) = 4\pi r^2 \frac{|p(r)|^2}{P^2} = \frac{4\pi R_0^2}{(\omega_0^2/\omega^2 - 1)^2 + \delta^2} \quad (1.20)$$

Ces relations sont valables tant que l'on peut écrire l'équation 1.12, c'est-à-dire tant que le rayon de la bulle est suffisamment petit devant la longueur d'onde acoustique pour que la pression soit uniforme dans son voisinage. On admet classiquement que le domaine de validité de cette approximation s'étend jusqu'à  $kR_0 \approx 0,4$  [25]. Au-delà, d'autres résonances interviennent, la première à  $kR_0 \approx 0,48$  étant de type dipolaire [15].

Nous cherchons maintenant à exprimer la section efficace d'absorption d'une bulle. D'après l'équation 1.12, la dissipation d'énergie de l'oscillateur "bulle" est liée à des forces dont la puissance instantanée est donnée par le produit  $b\dot{V} \cdot \dot{V}$ . La puissance moyenne dissipée sur un cycle de période  $\tau$  est donc :

$$\langle \dot{W} \rangle = \int_0^\tau b\dot{V} \cdot \dot{V} dt \quad (1.21)$$

Pour une bulle en régime forcé à la pulsation  $\omega$ ,  $V = A \cos(\omega t - \theta)$ , avec  $\theta$  le déphasage par rapport à l'excitation. On obtient donc

$$\langle \dot{W} \rangle = \frac{\omega^2 A^2 b}{2} \quad (1.22)$$

Ainsi,

$$\sigma_{diff} = \frac{\omega^2 A^2 b^{rad}}{2I_{inc}} \quad (1.23)$$

$$\text{et } \sigma_{abs} = \frac{\omega^2 A^2 (b^{th} + b^{vis})}{2I_{inc}} \quad (1.24)$$

La section efficace d'absorption d'une bulle est donc liée à la section efficace de diffusion par le rapport des facteurs d'amortissement  $(\delta^{th} + \delta^{vis})/\delta^{rad}$ , et on obtient finalement :

$$\sigma_{abs}(R_0, \omega) = \frac{\delta^{th} + \delta^{vis}}{\delta^{rad}} \frac{\sigma_{geo}}{(\omega_0^2/\omega^2 - 1)^2 + \delta^2} \quad (1.25)$$



avec la section efficace géométrique de la bulle  $\sigma_{geo} = 4\pi R_0^2$ .

A la résonance, les sections efficaces sont plusieurs ordres de grandeur supérieures à la section géométrique de la bulle. En effet,  $1/\delta^2 \gg 1$  et on peut vérifier que :

$$\sigma_{diff}(\omega_0) = \frac{1}{\delta^2} \sigma_{geo} \quad (1.26)$$

$$\sigma_{abs}(\omega_0) = \frac{\delta^{th} + \delta^{vis}}{\delta^{rad}} \frac{1}{\delta^2} \sigma_{geo} \quad (1.27)$$

Notons également que le rapport  $(\delta^{th} + \delta^{vis})/\delta^{rad}$  est toujours supérieur à 1 dans la gamme de rayons représentée sur la figure 1.1. La section efficace d'absorption est donc toujours supérieure à la section de diffusion à la résonance.

Dans la limite des grands rayons et hautes fréquences ( $kR_0 \gg 1$ ), la section efficace de diffusion tend vers la section efficace géométrique (figure 1.2). Ainsi, une bulle non résonante peut avoir une section efficace de diffusion supérieure à celle d'une bulle résonante à la fréquence considérée, pour peu que son rayon soit dix fois supérieur au rayon résonant.

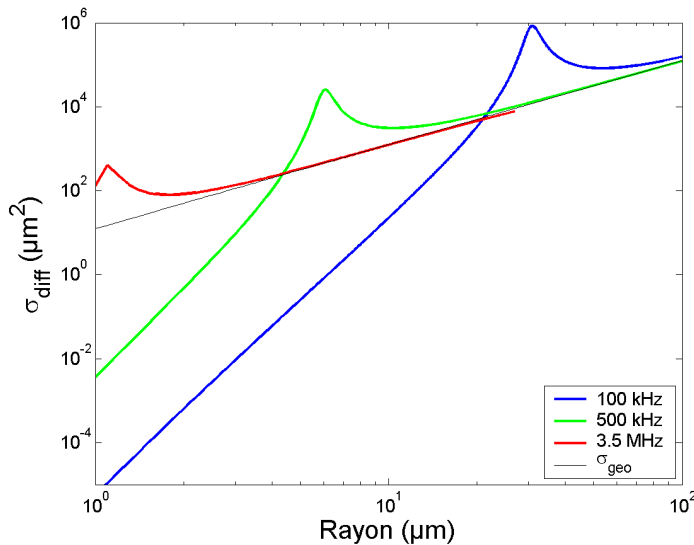


FIG. 1.2 – Sections efficaces de diffusion d'une bulle en fonction du rayon à trois fréquences d'intérêt. En trait noir, la limite asymptotique de la section efficace géométrique  $\sigma_{geo}$ .

### 1.2.3 Non-linéarités

En régime forcé de faible amplitude, une bulle oscille de manière linéaire, et le signal acoustique rayonné est essentiellement constitué de la fréquence d'excitation. Quand l'amplitude du signal appliqué devient plus importante, le champ rayonné par une bulle peut contenir des signaux large bande ainsi que des raies à des fréquences discrètes au dessus de la fréquence d'excitation (harmoniques) et également en dessous (sous-harmoniques) [16]. Les fréquences

harmoniques détectées pour des puissances acoustiques modérées sont constituées de composantes à des multiples entiers de la fréquence d'insonification. Leur apparition est due à l'asymétrie naturelle qui existe entre la phase d'expansion d'une bulle et la phase de compression, cette dernière étant nécessairement limitée par un rayon minimum.

On considère une bulle initialement au repos avec un rayon  $R_0$ , dans un liquide incompressible à la pression hydrostatique  $P_0$ . Au temps  $t = 0$ , on impose une surpression  $P(t)$  loin de la bulle :  $p_\infty = P_0 + P(t)$ . On note alors  $R(t)$  le rayon de la bulle au temps  $t$ .

Au cours de ce processus, le liquide acquiert une énergie cinétique  $E_c(t)$  dont on obtient l'expression par intégration sur des couches concentriques de liquide :

$$E_c(t) = \int_{R(t)}^{+\infty} \frac{1}{2} (\rho 4\pi r^2 dr) \dot{r}^2 \quad (1.28)$$

La conservation du flux impose alors la relation  $\dot{r}r^2 = \dot{R}R^2$  pour tout  $r > R$  et nous permet d'exprimer  $\dot{r}$  en fonction de  $R$  et  $\dot{R}$  dans la relation 1.28. Nous obtenons finalement

$$E_c(t) = 2\pi\rho\dot{R}^2(t)R^3(t) \quad (1.29)$$

Le travail réalisé au cours de cette opération a consisté à déplacer le liquide en deux endroits : près de la bulle (avec une pression  $p_L$ ) et à l'infini (avec une pression  $p_\infty$ ). On peut donc calculer le travail total  $W$  comme la différence des travaux exercés près de la bulle et ceux exercés au loin :

$$W = \int_{R_0 \rightarrow R(t)} p_L dV - \int_{R_0 \rightarrow R(t)} p_\infty dV \quad (1.30)$$

$$W = \int_{R_0}^{R(t)} (p_L - p_\infty) 4\pi R^2 dR \quad (1.31)$$

En écrivant l'égalité entre le travail et l'énergie cinétique, que l'on différencie par rapport à  $R$ , on obtient l'équation de Rayleigh pour le rayon :

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = \frac{p_L - p_\infty}{\rho} \quad (1.32)$$

De manière équivalente, cette équation s'écrit en fonction du volume  $V$  de la bulle :

$$aV^{-1/3}\ddot{V} - \frac{a}{6}V^{-4/3}\dot{V}^2 = p_L - p_\infty \quad (1.33)$$

avec  $a = 3^{-1/3}(4\pi)^{-2/3}\rho$ .

En résolvant l'équation 1.33 qui gouverne l'évolution non linéaire du volume de la bulle, Zabolotskaya [26] montre que l'amplitude  $V_{2\omega}$  des oscillations de volume à la fréquence double

de l'insonification vérifie :

$$V_{2\omega} = \frac{\varepsilon^2(\alpha - 3\beta\omega^2)A^2}{2[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^4\delta^2][(\omega_0^2 - 4\omega^2)^2 + 16\omega^4\delta^2]^{1/2}} \quad (1.34)$$

avec les constantes  $\varepsilon = 4\pi R_0/\rho_0$ ,  $\alpha = 3\beta(\gamma + 1)\omega_0^2$  et  $\beta = \pi R_0^3/8$ .

Nous représentons sur la figure 1.3 l'amplitude  $P_{2\omega} = (2\omega)^2 \rho V_{2\omega}/(4\pi r)$  du signal harmonique mesuré à la distance  $r$  de la bulle.

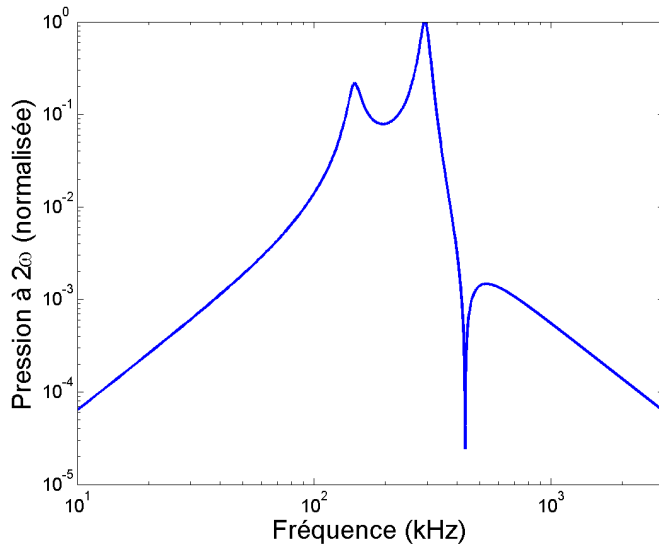


FIG. 1.3 – Amplitude normalisée du signal harmonique à la fréquence double de l'insonification, pour une bulle de rayon  $10 \mu\text{m}$ .

La génération du second harmonique est importante essentiellement quand la fréquence d'excitation est proche de la résonance à  $\omega_0$ , ainsi qu'à  $\omega_0/2$ . Au-delà de la pulsation  $\omega_0 \sqrt{\gamma + 1}$  pour laquelle son amplitude s'annule, le signal harmonique décroît rapidement en  $\omega^{-2}$ .

### 1.3 Etude et conception du dispositif expérimental

Pour étudier le régime de diffusion multiple, nous avons tout d'abord cherché à nous placer dans des conditions expérimentales telles que l'onde cohérente a perdu une majeure partie de son énergie au profit des ondes diffusées.

Les nuages de bulles que nous étudions étant de dimensions finies, leur extension spatiale  $L$  doit donc être au moins de quelques libres parcours moyens élastiques. Idéalement, le libre parcours moyen d'absorption doit être aussi grand que possible, et les diffuseurs doivent présenter une efficacité de génération harmonique suffisante.

Nous étudions ici les implications expérimentales de ces contraintes sur le choix des paramètres.

### Fréquence d'étude et rayon des bulles

La fréquence optimale pour étudier expérimentalement la diffusion multiple dans les nuages de bulles est une question assez peu abordée dans les différentes publications. Celle-ci n'a bien sûr de sens que relativement au rayon des bulles que l'on étudie.

En vertu de la relation 1.10, un milieu hétérogène dont les diffuseurs présentent une section efficace de diffusion importante est favorable à l'étude de la diffusion multiple, puisque son libre parcours moyen élastique peut alors être très faible. En première approche, il semble donc intéressant d'explorer le régime résonant d'un nuage de bulles puisque les sections efficaces de diffusion des bulles y sont maximales.

Dans les faits, la section efficace de diffusion d'une bulle à la résonance est certes supérieure de deux ordres de grandeur à la section géométrique, mais elle est elle-même dépassée d'un facteur  $(\delta^{th} + \delta^{vis})/\delta^{rad}$  par la section efficace d'absorption. Ce facteur est globalement décroissant en fonction du rayon, mais reste supérieur à 2 pour une bulle de rayon inférieur à 1 mm, ce qui laisse peu d'espoir pour observer un régime de diffusion multiple d'ordre élevé à la résonance.

L'information portant sur la section efficace de diffusion seule n'est donc pas suffisante pour nous assurer que le régime de diffusion multiple pourra s'établir : il faut également s'intéresser au rapport des sections efficaces de diffusion et d'absorption.

Nous représentons donc sur la figure 1.4 le rapport  $\sigma_{diff}/\sigma_{abs}$  en fonction du rayon d'une bulle, calculé au moyen des relations 1.26 et 1.27, pour trois fréquences auxquelles nous avons accès expérimentalement.

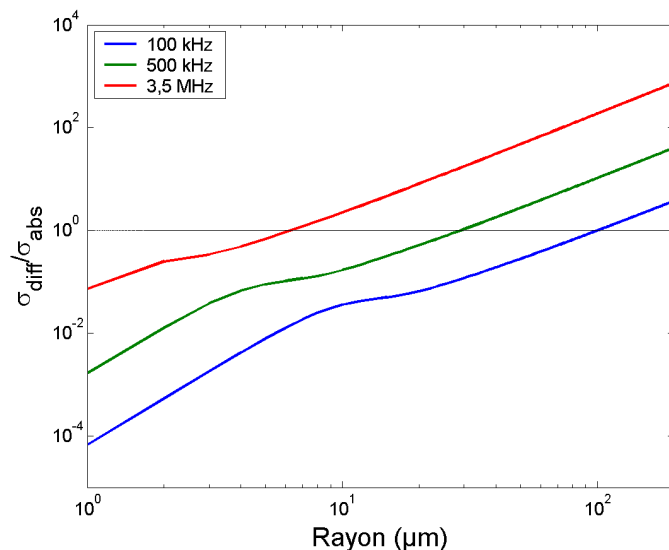


FIG. 1.4 – Etude du rapport entre la section efficace de diffusion  $\sigma_{diff}$  et la section efficace d'absorption  $\sigma_{abs}$  d'une bulle en fonction de son rayon, à trois fréquences d'intérêt.

Pour une bulle de rayon fixé, nous avons tout intérêt à nous placer à haute fréquence pour maximiser le rapport des sections efficaces. Ainsi, la section efficace de diffusion d'une bulle

de rayon 10 microns devient supérieure à sa section d'absorption au dessus de 2 MHz, c'est-à-dire bien au dessus du régime résonant qui intervient autour de 300 kHz. Dans cette plage de fréquences pour laquelle une bulle présente une section efficace de diffusion dite "géométrique" et une section efficace d'absorption d'autant plus faible que la fréquence est élevée, il devient intéressant d'utiliser des bulles de rayon plus important.

En revanche, nous avons vu que le régime non-linéaire se manifeste essentiellement près de la résonance de Minnaert. Pour étudier le régime de diffusion multiple non-linéaire, il y a donc un compromis à trouver entre l'absorption et l'efficacité de génération harmonique.

Expérimentalement, les fréquences centrales des réseaux de transducteurs que nous utilisons au laboratoire couvrent approximativement la gamme allant de 300 kHz à 3,5 MHz. Nous avons donc choisi de générer des bulles dont la résonance intervient autour de 300 kHz afin de disposer d'une efficacité non-linéaire importante pour nos plus basses fréquences accessibles. Au besoin, il serait toujours possible de travailler à des fréquences un peu plus élevées pour favoriser la diffusion multiple, quitte à compenser une efficacité non-linéaire décroissante par des puissances acoustiques plus élevées. L'objectif à atteindre en termes de rayon moyen de la population de bulles est donc de l'ordre de 10  $\mu\text{m}$ .

### **Polydispersité**

La question de la polydispersité de la population de bulles est évoquée par Sornette et Souillard dans un article étudiant la possibilité d'observer la localisation forte dans les nuages de bulles résonantes [11]. Cette question est en effet cruciale quand on s'intéresse au régime résonant, puisque la résonance d'une bulle est caractérisée par une largeur finie. Ainsi dans une population de bulles distribuée selon une loi normale de largeur 10  $\mu\text{m}$ , les auteurs estiment à moins de 1 % la fraction de bulles simultanément à la résonance.

Dans la mesure où nous n'exploiterons pas le régime résonant, mais plutôt le régime asymptotique des sections géométriques, la question de la polydispersité n'est pas aussi pertinente, puisque nous disposons d'une section efficace de diffusion croissante sur la plage de rayons considérée. Il faudra juste s'assurer que l'on ne génère pas de trop petites bulles, qui sont susceptibles de présenter des sections d'absorption importantes.

### **Distances caractéristiques - fraction volumique**

Dans un nuage de bulles que nous admettrons monodisperse, la propagation acoustique d'une onde dépend de trois longueurs caractéristiques : le rayon  $R_0$  de la bulle à l'équilibre, la distance moyenne  $d$  entre bulles et la longueur d'onde  $\lambda$ . Le rayon de la bulle ainsi que la longueur d'onde nous permettent en effet de calculer la section efficace de diffusion des bulles, tandis que la distance moyenne entre bulles nous renseigne sur la densité des diffuseurs.

Il faut tout d'abord noter que dans le régime de fréquences considéré, au dessus de la résonance de Minnaert, on vérifie toujours la condition  $\lambda \gg R_0$ . La résonance de Minnaert intervient en effet pour une longueur d'onde typiquement 500 fois plus grande que le rayon de la bulle.

Partant de la condition  $\sigma_{diff} = \sigma_{abs}$ , nous établissons maintenant la condition portant sur la distance moyenne entre diffuseurs.

En résolvant numériquement la relation  $\delta^{rad} = \delta^{th} + \delta^{vis}$ , nous obtenons une relation entre le rayon des bulles et la fréquence pour laquelle sections efficaces de diffusion et d'absorption sont égales (figure 1.5). Au dessus de la courbe présentée sur la figure 1.5, nous atteignons donc un régime dans lequel la diffusion prime sur l'absorption.

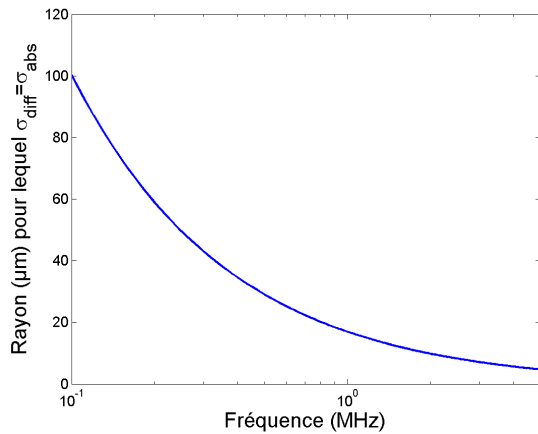


FIG. 1.5 – Evolution du rayon des bulles pour lesquelles  $\sigma_{diff} = \sigma_{abs}$  en fonction de la fréquence.

Combinée à la relation  $l_e = 1/(n\sigma_{diff})$ , la relation représentée sur la figure 1.5 nous permet de calculer les densités et fractions volumiques de bulles à atteindre pour obtenir un libre parcours moyen élastique de 10 mm<sup>¶</sup> (figure 1.6.a). De là, nous tirons facilement la distance moyenne  $d$  entre bulles et le rapport  $d/\lambda$  quand le libre parcours moyen est fixé à 10 mm (figure 1.6.b).

La figure 1.6.b nous indique que la distance entre bulles est inférieure à la longueur d'onde dans la gamme de fréquences accessible à l'expérience. Les résultats présentés sur la figure 1.6 doivent donc être considérés comme indicatifs, puisque la formule donnant le libre parcours moyen élastique dans le cadre de l'ISA n'est précisément pas valable dans le cas où les diffuseurs sont en champ proche ( $d < \lambda$ ) [12]. Dans ces conditions, un libre parcours moyen aussi faible n'est peut-être pas atteignable. Nous conserverons tout de même l'idée que le milieu doit être dense.

Puisque  $R_0 < d$ , le régime d'intérêt pour observer la diffusion multiple dans les nuages de bulles en utilisant le régime asymptotique des sections efficaces géométrique est donc défini par l'inégalité suivante :  $R_0 < d < \lambda$ .

Cette première étude nous conduit donc à penser que la résonance de Minnaert des bulles de taille micrométrique n'est pas exploitable dans la pratique pour observer une contribution incohérente importante, ne serait-ce qu'en régime linéaire. En effet, l'absorption y est alors maxi-

<sup>¶</sup>Cette valeur arbitraire de  $l_e$  correspond en effet à un cinquième de l'épaisseur de notre échantillon, et devrait permettre de disposer d'un régime de diffusion multiple intéressant.

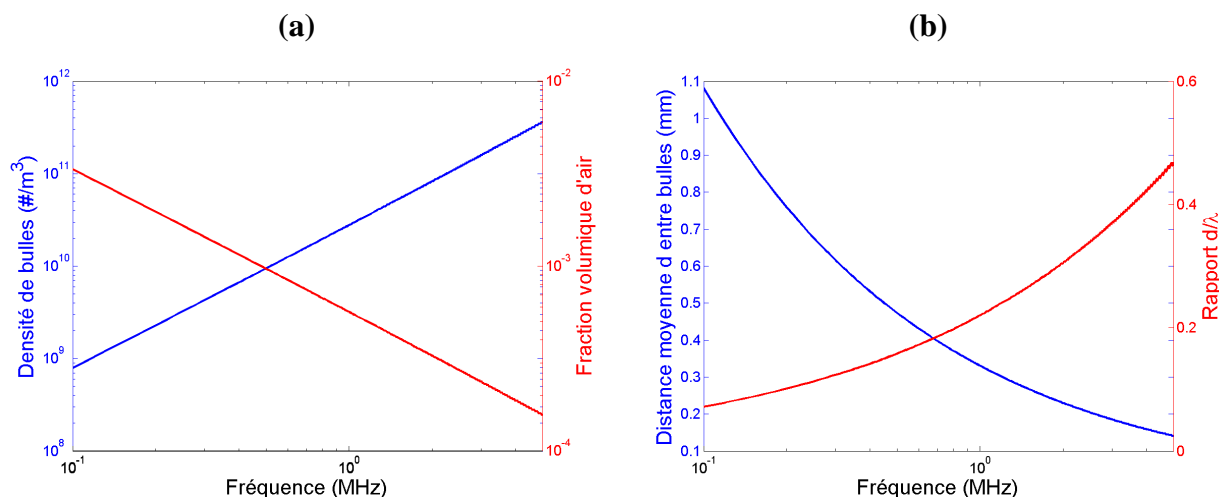


FIG. 1.6 – (a) Densité de bulles (bleu) et fraction volumique d’air correspondante (rouge) nécessaires à l’obtention d’un libre parcours moyen de 10 mm quand la condition  $\sigma_{diff} = \sigma_{abs}$  est vérifiée. (b) Distance moyenne  $d$  entre bulles (bleu) et rapport  $d/\lambda$  (rouge) pour  $l_e = 10$  mm.

male, ce qui diminue la possibilité de diffusion multiple d’ordre élevé. Il est donc nécessaire d’explorer le régime des hautes fréquences, avec des concentrations importantes en diffuseurs.

L’observation de la diffusion multiple en régime non-linéaire est donc clairement soumise à un double compromis au niveau de la taille des bulles, et de la fréquence d’étude. Pour des bulles trop petites et/ou une fréquence trop basse, nous n’observerons pas de diffusion multiple à cause de l’absorption, et pour des bulles trop grosses et/ou une fréquence trop élevée, l’efficacité de génération harmonique sera réduite.

L’enjeu sera donc de créer un dispositif expérimental permettant de faire varier à souhait la taille des bulles générées et la fréquence d’étude afin de trouver le meilleur compromis.

### Dispositif expérimental

Nous avons construit le dispositif expérimental sur la base d’un cahier des charges plutôt fourni et ambitieux. Qu’on en juge par l’énoncé de celui-ci : le dispositif doit tout d’abord permettre de créer des bulles de rayon moyen ajustable entre 10 et plusieurs dizaines de microns. Il doit également permettre de régler la concentration en bulles, idéalement de manière indépendante de la taille des bulles produites. Il doit assurer l’homogénéité et la reproductibilité du mélange bulleux, afin de permettre des expériences acoustiques fiables en transmission et en rétrodiffusion. Enfin, son rôle sera également de limiter l’extension spatiale du nuage de bulles.

Nous ne présenterons pas les différentes étapes expérimentales qui nous ont permis d’aboutir au résultat que nous présentons sur la figure 1.7. Détaillons plutôt le dispositif expérimental que nous avons utilisé pour réaliser les expériences qui suivent.

Un bâti en plexiglas en forme de H allongé supporte de part et d’autre deux films en plastique alimentaire très fin, transparent aux ultrasons. Les dimensions du bâti sont 35 cm de longueur et

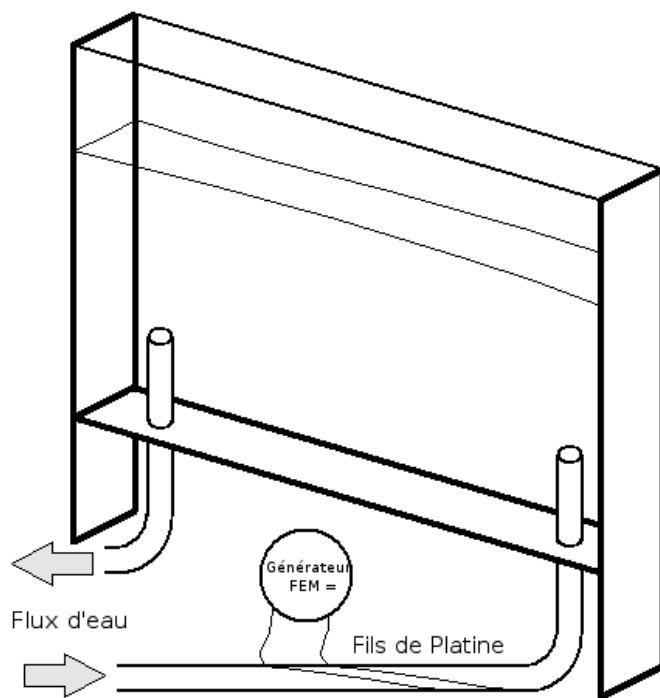


FIG. 1.7 – Dispositif expérimental utilisé pour générer un nuage de bulles reproductible d'extension spatiale limitée. Le bâti en plexiglas est représenté en trait épais.

25 cm de hauteur. Dans l'espace de profondeur 5 cm délimité par le bâti et les films plastiques, nous introduisons deux tuyaux d'arrivée et d'évacuation d'eau. Ceux-ci sont reliés à une pompe d'aquarium, qui réalise le brassage du mélange bulleux.

Entraînés par un flux d'eau de vitesse très inférieure à 15 cm par seconde, les diffuseurs acquièrent une vitesse inférieure d'un facteur  $10^4$  à la vitesse du son dans l'eau. Au cours de la propagation acoustique sur une distance de 5 cm, les diffuseurs se déplacent donc d'une distance très inférieure à 5 microns.

Au vu de la longueur d'onde d'étude (millimétrique), on peut donc considérer qu'une mesure acoustique sur un tel milieu donne accès à une configuration figée des diffuseurs.

La production des bulles est assurée par deux fils de platine placés dans le conduit d'injection d'eau et reliés à une alimentation stabilisée. L'électrolyse est rendue possible par la présence d'ions en solution, essentiellement du chlore ( $\text{Cl}^-$ ) que nous utilisons pour assurer la propreté de l'eau.

Il est alors possible de contrôler la taille des bulles en jouant sur la vitesse du flux d'eau cisailant, tandis que leur quantité sera ajustée au moyen de la tension d'alimentation. Ce ne sont en fait que des tendances, puisque taille et quantité des bulles produites ne sont pas deux variables strictement indépendantes. Notons enfin qu'en l'absence du flux d'eau cisailant, la tension d'électrolyse contrôle la taille des bulles plutôt que leur quantité.



Nous avons alors constaté que plusieurs facteurs limitaient la reproductibilité de la population de bulles. Il s'agit de la conductivité de la solution, ainsi que l'état d'entartrement des fils de platine, dont l'effet est de produire des bulles plus grosses.

Enfin, il faut noter que la population stable de bulles met un certain temps à s'établir, puisque la pompe a tendance à piéger initialement les bulles dans ses filtres et à les relâcher au fur et à mesure de leur saturation. Toute expérience acoustique doit donc être menée quelques minutes après allumage du dispositif, afin d'assurer la stationarité de la population de bulles créée.

L'étape suivante a consisté à caractériser la population de bulles créée, et c'est précisément l'objet du chapitre qui suit.

# Chapitre 2

## Caractérisation du milieu

On rencontre dans la vie courante un grand nombre de produits dans lesquels les bulles jouent un rôle majeur. De même, certains processus dans l'industrie requièrent des concentrations contrôlées en bulles, quand celles-ci ne sont pas à proscrire totalement. Partant de ce constat, Leighton consacre dans son ouvrage une section complète (5.1) à l'étude des techniques acoustiques permettant de résoudre le problème inverse. Rappelons que celui-ci consiste à obtenir la fonction de distribution de la population de bulles à partir de mesures acoustiques réalisées *in situ*. Pour nos propres besoins, nous avons dû tester et mettre en œuvre plusieurs de ces méthodes, que nous exposons ici.

### 2.1 Caractérisation d'une population de bulles

#### 2.1.1 Méthodes optiques

Dans les méthodes optiques qui permettent de déterminer les dimensions des bulles, la photographie vient tout de suite à l'esprit. Celle-ci convient pour déterminer le rayon des bulles de tailles intermédiaires, qui restent sphériques grâce à la tension de surface et qui ne sont pas trop petites. La limite inférieure en termes de rayons mesurables à l'aide de cette méthode est fixée par le rapport de grandissement de l'objectif et par la résolution du capteur photographique\*.

La luminosité de la scène est un paramètre critique puisque celle-ci détermine l'ouverture du diaphragme (liée à la profondeur de champ) ainsi que la vitesse d'obturation (donc la capacité à figer le mouvement des bulles). On utilise donc généralement un éclairage d'appoint, fourni par un flash dont la durée brève, de l'ordre de  $1/2000$  s, immobilise le mouvement.

Il reste ensuite à segmenter efficacement l'image, ce qui permet de disposer d'une image binaire à partir de laquelle les opérations de comptage et tri des bulles peuvent s'effectuer à l'aide d'un logiciel dédié, tel que *ImageJ*.

Dans la pratique, nous avons disposé d'un appareil numérique Kodak DCS14n, muni d'un capteur de taille  $24 \times 36$  mm, qui fournit des clichés de  $4500 \times 3000$  pixels. Chaque pixel a une

---

\*Nous supposons ici que la dimension caractéristique de la tache de diffraction liée à l'ouverture limitée de l'objectif est inférieure à la taille d'un pixel du capteur.

taille de  $7,9 \times 7,9 \mu\text{m}$ . L'objectif utilisé est un objectif macro de focale 105 mm, de marque micro-Nikkor, dont le grandissement est unitaire à la distance minimale de mise au point (31,4 cm). A cette distance, la taille de l'objet photographié et celle de son image sur le capteur sont identiques, ce qui facilite l'analyse.

La profondeur de champ au minimum de mise au point vaut  $64n$  en  $\mu\text{m}$ , où  $n$  est le nombre d'ouverture, c'est-à-dire le rapport de la focale par le diamètre du diaphragme. Pour établir cette relation, nous avons utilisé la formule démontrée dans l'annexe D, avec un cercle de confusion de diamètre 2 pixels<sup>†</sup>. Pour une ouverture de  $f/8$ , la profondeur de champ est donc de 0,5 mm.

Les plus petites bulles observées avec ce dispositif imageur ont un diamètre de l'ordre de 3 pixels, soit  $24 \mu\text{m}$ . Nous n'avons donc pas été en mesure de déterminer la distribution de la population de bulles du nuage à partir des photographies, puisqu'une grande partie de celles-ci se trouvent en deçà de la limite de résolution.

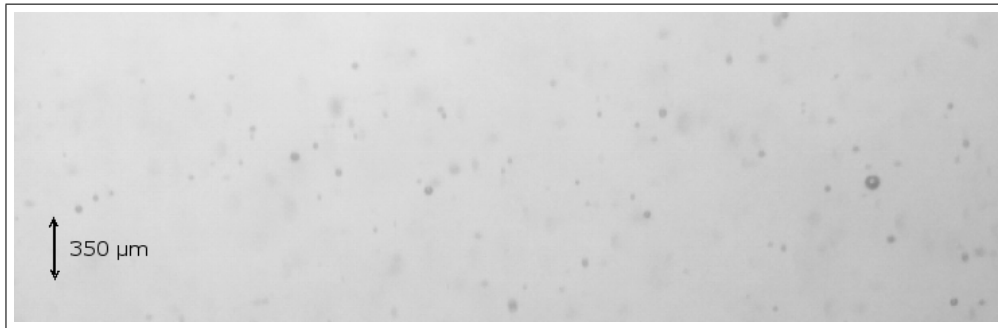


FIG. 2.1 – Photo du mélange bulleux créé avec le dispositif décrit en section 1.3 sous une tension d'alimentation de 15 V. La plus grosse bulle visible sur cette photo a un diamètre de 10 pixels, ce qui correspond à un rayon de  $40 \mu\text{m}$ .

La vitesse de montée d'une bulle à la surface peut également nous donner des indications sur sa taille. Dans l'eau, une bulle est en effet soumise à son propre poids (négligeable), à la force d'Archimède dirigée vers le haut, et à une force de frottement dirigée vers le bas.

Dans le cas général, l'expression de la force de frottement n'est pas évidente. Celle-ci dépend en effet de la taille de la bulle et de la présence éventuelle d'impuretés à l'interface eau/air<sup>‡</sup>.

La formule de Stokes exprime la force de traînée  $F_t$  subie par un corps sphérique rigide de rayon  $r$ , animé d'une vitesse  $v$  dans un fluide de viscosité dynamique  $\eta$  :

$$F_t = 6\pi\eta_{\text{eau}}rv \quad (2.1)$$

Si l'on suppose que le régime transitoire est très court, on peut approximer la vitesse de montée

<sup>†</sup>Le cercle de confusion est l'image d'un point situé à la limite de la profondeur de champ.

<sup>‡</sup>Une bulle est dite "sale" quand son interface est stabilisée par la présence de surfactants. A bas nombre de Reynolds, elle se comporte alors plutôt comme une sphère rigide (Source : <http://www.bubbleology.com/Hydrodynamics.html>).

d'une sphère rigide par la vitesse stationnaire atteinte quand la force de frottement visqueux compense exactement la force d'Archimède :

$$\left(\frac{4\pi r^3 \rho_{eau}}{3}\right) g = 6\pi \eta_{eau} r v \quad (2.2)$$

Soit :

$$v = \frac{2\rho_{eau} g}{9\eta_{eau}} r^2 \quad (2.3)$$

Dans le cadre de ce modèle, la vitesse limite atteinte par une bulle rigide serait proportionnelle au carré du rayon et conduirait à des vitesses ascensionnelles de l'ordre de 2,2 cm/s pour des bulles de rayon 100  $\mu\text{m}$ <sup>§</sup>.

Pour acquérir simultanément les valeurs des rayons et les vitesses d'ascension des bulles, nous avons imaginé une méthode photographique originale. Sur la photo de la figure 2.2, un temps de pose relativement long associé à un éclairage halogène puissant génère une trace lumineuse de longueur proportionnelle à la distance parcourue par la bulle pendant la pose. Un flash très bref fige l'ascension des bulles, de manière à pouvoir mesurer leur rayon.

Le modèle basé sur la force de Stokes n'est pas applicable aux bulles que nous avons observées, puisque nous constatons une dépendance linéaire entre la vitesse de montée et le rayon des bulles (figure 2.2). La force de traînée aurait donc une dépendance en  $r^2$ , c'est-à-dire qu'elle serait proportionnelle à la section de la bulle. La bibliographie confirme que la formule de Stokes sous-estime la force de traînée pour les bulles de taille importante ([16], p122).

Grâce à cette expérience, nous pouvons raisonnablement extrapoler la vitesse d'ascension des bulles de rayon inférieur à 250  $\mu\text{m}$ .

Dans la pratique, cette méthode n'est pas des plus fiables pour évaluer le rayon d'une bulle à partir de l'observation de sa vitesse d'ascension. En effet, la présence de plus grosses bulles dans un nuage polydisperse a un effet d'advection du fluide, qui entraîne naturellement les plus petites bulles. Les valeurs expérimentales utilisées pour tracer le graphe 2.2 ont d'ailleurs été mesurées sur des bulles isolées.

L'intérêt de cette étude apparaît cependant quand on cesse la génération des bulles : pour une hauteur donnée  $h$  de l'aquarium, et après un temps  $T$ , on sait que seules resteront en suspension les bulles de rayon inférieur à  $h/\alpha T$ , où  $\alpha$  est le coefficient directeur de la droite présentée sur la figure 2.2. Avec le dispositif expérimental que nous avons mis en œuvre, et pour une tension d'électrolyse de 30 V, nous avons pu mesurer des vitesses d'ascension aussi faibles que 0,8 mm/s, ce qui correspond à des bulles de rayon 4  $\mu\text{m}$ .

---

<sup>§</sup>avec une viscosité dynamique de l'eau  $\eta \approx 10^{-3}$  kg/m/s

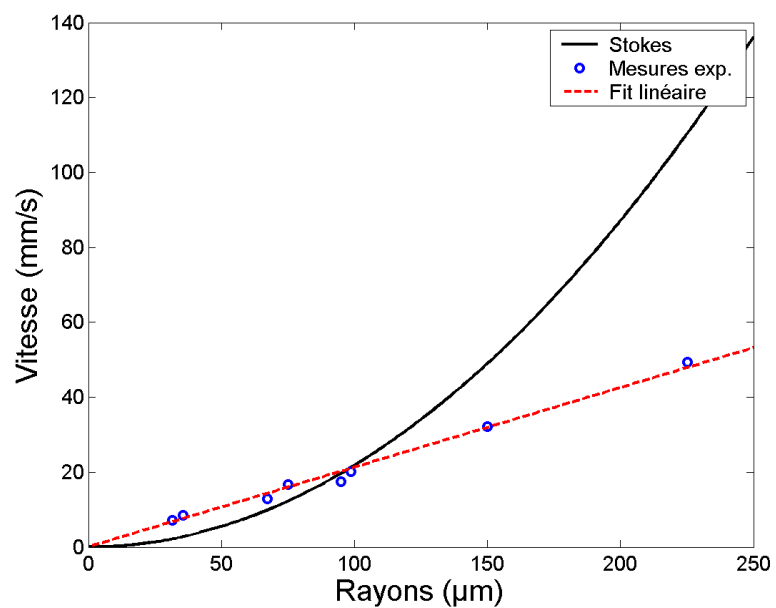


FIG. 2.2 – Ascension de quelques bulles issues de l'extrémité d'un fil de platine, relié à un générateur de tension continue. La photographie ci-contre a été prise en synchronisation lente au 50ème de seconde avec un éclairage externe continu. Les vitesses d'ascension mesurées sur plusieurs bulles à partir de photos semblables sont reportées sur le graphe ci-dessus. Le coefficient directeur  $\alpha$  de la droite ajustée aux données expérimentales est de  $0,21 \text{ mm/s}/\mu\text{m}$ . La vitesse d'ascension donnée par la loi de Stokes est ici représentée en noir à titre indicatif.

### 2.1.2 Méthodes acoustiques linéaires

Il existe des méthodes passives, qui consistent à écouter les bruits produits par les bulles, et des méthodes actives, qui consistent à exciter les bulles dans un champ acoustique.

Leighton et Walton sont parvenus à déterminer la taille de bulles générées dans un cours d'eau turbulent [27] en tirant parti de la propension des bulles à osciller librement autour de leur rayon d'équilibre. Le principe de la méthode repose sur la mesure de la fréquence des oscillations propres des bulles. Les sons enregistrés sont constitués d'une succession d'oscillations à la fréquence de Minnaert, ce qui permet la détermination de la distribution de taille des bulles. Il est impressionnant d'apprendre que Minnaert avait réalisé cette même expérience en 1933 en déterminant à *l'oreille* la hauteur du son produit par une bulle naissante à l'aide d'un diapason !

Si cette méthode convient pour déterminer la taille de bulles millimétriques (voir la figure 2.3), elle est en revanche inadaptée pour l'étude des bulles micrométriques en raison de la sensibilité insuffisante des hydrophones.

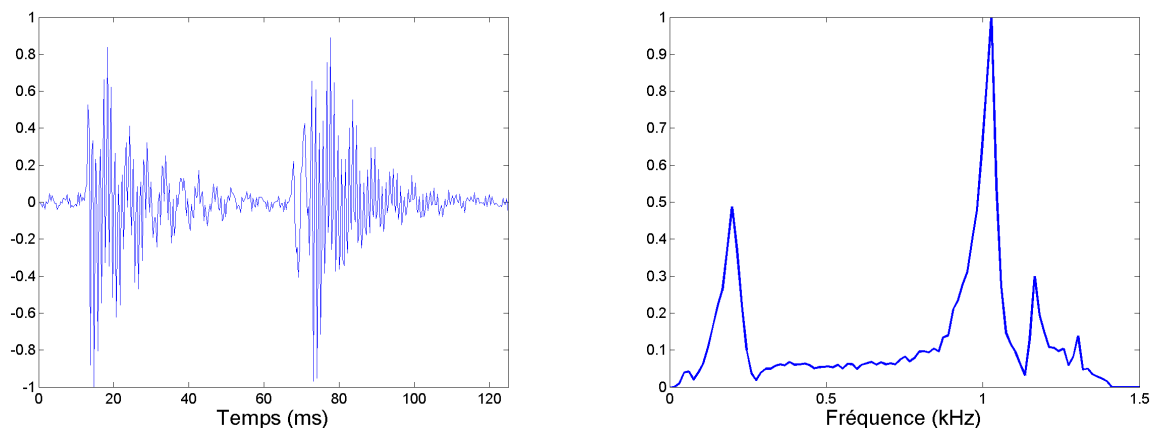


FIG. 2.3 – A gauche, les signaux temporels enregistrés par un hydrophone de type Bruel&Kjaer 8103 (bande passante 0,1-200 kHz) placé au voisinage d'une buse d'injection de bulles millimétriques. Chaque bulle naissante donne lieu à l'enregistrement d'une oscillation d'amplitude décroissante. A droite, le spectre d'un signal issu d'une bulle unique dans lequel apparaissent la fréquence d'oscillation propre de la bulle, à 1020 Hz, ainsi que le mode collectif de la colonne de bulles, à 200 Hz. Le rayon d'une bulle oscillant naturellement à cette fréquence est de 3,2 mm. Dans la pratique, une bulle de cette taille présente plutôt un profil elliptique que sphérique.

Les méthodes actives d'excitation à la résonance consistent à insonifier une collection de bulles tout en écoutant le signal rétrodiffusé. Dans le cas où l'insonification est réalisée avec un signal monochromatique, on peut s'attendre à ce que l'amplitude du signal reçu soit maximale quand la fréquence correspond à la résonance des bulles. Dans la pratique, si la section efficace de diffusion d'une bulle unique est maximale à la résonance, il ne s'agit que d'un maximum local : pour une fréquence donnée, la section efficace de diffusion d'une bulle est en effet globalement croissante avec le rayon des bulles.

Cette méthode échoue donc en présence d'une collection de bulles polydisperses, puisqu'une bulle de taille supérieure à la taille résonante peut générer un écho d'amplitude supérieure à celui d'une bulle résonante.

Pour clore le chapitre des méthodes linéaires, il nous a semblé intéressant de mentionner l'existence d'un appareil, conçu par la société Dynaflow<sup>¶</sup>, qui permet d'extraire la population de bulles depuis des mesures de l'atténuation et de la vitesse de phase réalisées à plusieurs fréquences [28, 29]. L'instrument, dont le nom commercial est **Acoustic Bubble Spectrometer**, est composé de deux transducteurs large bande connectés à un système d'acquisition relié à un ordinateur. La résolution du problème inverse est ici basée sur la relation de dispersion d'un liquide bulleux obtenue par Commander et Prosperetti [2], et conduit à deux équations intégrales de Fredholm de première espèce. Ces équations sont mal posées et difficiles à résoudre, en particulier quand les données sont bruitées. L'équipe scientifique de Dynaflow a semble-t-il levé ces difficultés en usant des techniques d'optimisation sous contraintes [30].

L'instrument développé est capable de délivrer des informations sur la fonction de distribution des bulles en temps réel. En revanche, aucune indication n'est donnée sur sa capacité à travailler avec de fortes concentrations de bulles, ni sur les limites de tailles mesurables.

Bien que séduisante, cette approche est extrêmement complexe à mettre en oeuvre et assez peu documentée, c'est pourquoi nous nous sommes tournés vers des méthodes non-linéaires, qui ont fait l'objet d'un plus grand nombre de validations par la communauté scientifique.

### 2.1.3 Méthodes acoustiques non-linéaires

La technique dite du second harmonique, initialement proposée par Miller, exploite la propension naturelle des bulles à générer des harmoniques quand l'amplitude des oscillations devient importante, c'est-à-dire essentiellement autour de la fréquence de résonance [31].

La méthode consiste à insonifier le milieu avec un faisceau monochromatique de fréquence ajustable, et à détecter la génération de la fréquence double à l'aide d'un second transducteur.

Dans la perspective de déterminer la distribution de rayons d'une large population de bulles, cette méthode est reconnue pour ne pas générer de fausses détections, ce qui constitue un avantage par rapport aux méthodes linéaires d'excitation à la résonance.

Le rayonnement à  $2\omega$  des bulles les plus grosses peut en revanche être atténué par l'absorption résonante due aux plus petites bulles.

Nous y voyons également un autre inconvénient, dont nous ne trouvons trace dans les différentes publications. Nous représentons sur la figure 2.4 l'amplitude des oscillations de volume de la bulle  $V_{2\omega}$  en fonction de la fréquence d'insonification, tel que calculé au chapitre précédent. L'efficacité de génération de second harmonique pour une bulle de rayon fixé est certes maximale à la fréquence de résonance, mais présente également un maximum local pour la fréquence  $\omega_0/2$ , pour laquelle les oscillations à la fréquence double sont favorisées.

---

<sup>¶</sup><http://www.dynaflow-inc.com/>

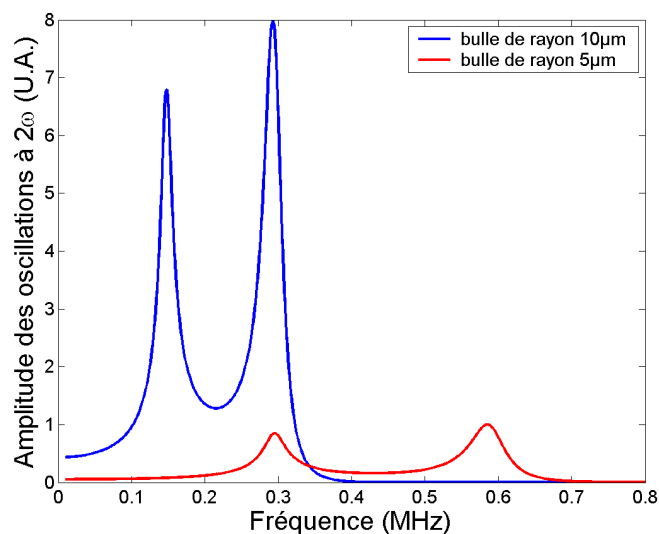


FIG. 2.4 – Efficacité de génération de la composante à  $2\omega$  par excitation de bulles de rayon  $10\mu\text{m}$  (en bleu - résonance à 290 kHz) et  $5\mu\text{m}$  (en rouge - résonance à 580 kHz), en fonction de la fréquence du faisceau d'excitation, selon Zabolotskaya [26].

Dans un nuage polydisperse insonifié à la fréquence  $f$ , le signal diffusé à la fréquence  $2f$  est le produit des oscillations de forte amplitude de bulles de tailles différentes. Cette méthode présente donc une légère ambiguïté, puisqu'elle ne détecte pas seulement les bulles résonantes mais également celles dont le rayon est deux fois plus faible (dans une proportion approximative de 8 contre 1).

Enfin, la génération de second harmonique n'est pas toujours conditionnée par la présence de bulles résonantes dans le faisceau, puisque celle-ci a lieu naturellement dans l'eau, et peut également apparaître du fait d'éventuelles non-linéarités du dispositif d'acquisition.

Toutes ces raisons nous ont conduit à ne pas utiliser cette méthode.

Les techniques que nous allons maintenant exposer ont une résolution spatiale améliorée par rapport aux méthodes précédentes : elles permettent de faire une mesure locale de la population de bulles. Si cela constitue un argument en leur faveur dans bien des situations, cette caractéristique n'est pas essentielle pour notre application. Elles ont en revanche d'autres atouts, que nous allons présenter.

Nous avons mis en œuvre la méthode proposée par Sutin *et al* [32] qui consiste à insonifier une faible portion du nuage à l'aide de deux faisceaux focalisés de haute fréquence (relativement à la résonance des bulles). Les fréquences des deux faisceaux monochromatiques diffèrent d'une valeur proche de la résonance des bulles à l'étude. Par interaction non-linéaire, une bulle résonante située dans le volume d'interaction génère alors la fréquence différence, que l'on détecte au moyen d'un hydrophone. Sutin montre que l'intensité de cette composante fréquentielle, moyennée sur un temps d'acquisition important, est reliée à la densité de bulles résonantes



à la fréquence différence<sup>||</sup>. Ainsi, en utilisant des transducteurs de fréquence centrale suffisamment haute, il est possible de couvrir une large plage de fréquences différences ( $\approx 1$  MHz), ce qui permet en théorie d'obtenir la distribution de bulles jusqu'aux plus faibles rayons.

Pour monter cette expérience, nous avons utilisé deux transducteurs à 3,5 MHz, focalisés à 10 cm et de diamètre 25 mm. Ils ont été construits par la société IMASONIC en technologie piezo-composite afin de délivrer des pressions acoustiques de l'ordre de 1 bar au point focal, conformément aux transducteurs utilisés par Sutin. Leur bande passante à -6 dB (80%) est largement suffisante pour autoriser une excursion en fréquence de l'ordre de 400 kHz de part et d'autre de leur résonance.

Pour enregistrer les signaux à la fréquence différence, nous avons utilisé un hydrophone de type RESON TC4035, dont la bande passante s'étend de 10 à 800 kHz. Les fréquences extrêmes de la bande passante correspondent à des bulles résonantes de rayon 4 et 320  $\mu\text{m}$ , ce qui est *a priori* suffisant pour notre application.

Les deux transducteurs "primaires" sont disposés de telle sorte que leurs faisceaux se coupent à angle droit au point focal, de manière à minimiser la taille de la zone d'interaction (figure 2.5). Leurs positions sont ajustées en utilisant une sphère métallique de petite taille qui sert de réflecteur au point focal.

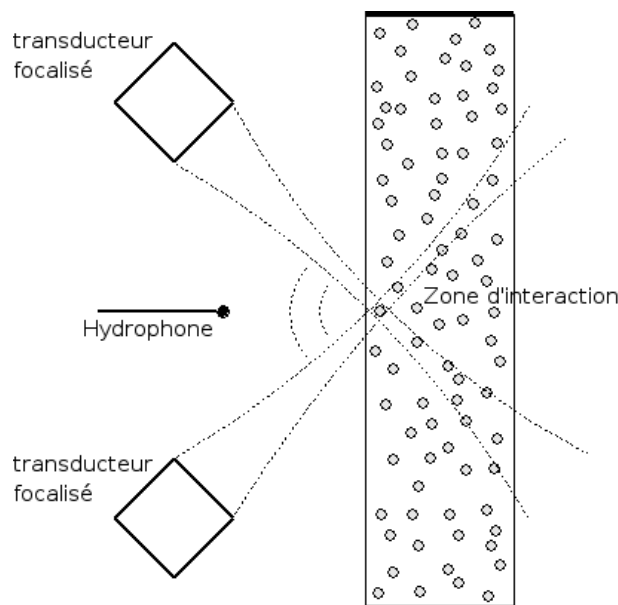


FIG. 2.5 – Dispositif expérimental de l'expérience d'interaction non-linéaire à deux faisceaux de haute fréquence.

Dans notre configuration expérimentale, nous avons jugé plus intéressant de placer l'hydrophone du même côté du nuage de bulles que les transducteurs primaires. En effet, alors que la figure 1 de la référence [32] suggère qu'il convient de placer hydrophone et transducteurs primaires de part et d'autre du nuage, nous avons pensé améliorer la sensibilité de l'expérience

<sup>||</sup>La moyenne sur l'espace est ici remplacée par une moyenne sur le temps. La méthode profite du mouvement du fluide, qui entraîne les diffuseurs, pour réaliser des moyennes sur la population de bulles.

en plaçant l'hydrophone en rétrodiffusion. En effet, les signaux à la fréquence différence ne souffrent pas de l'atténuation résonante à la traversée du nuage de bulles dans cette nouvelle configuration.

Expérimentalement, nous n'avons pas été en mesure d'identifier de manière fiable la composante spectrale à la fréquence différence. Nous avons modifié la position de l'hydrophone, conformément à l'article initial, et ajouté un filtre passe-bas de fréquence de coupure 800 kHz en sortie du conditionneur de signal de l'hydrophone, en vain. Les signaux que nous avons enregistrés étaient constitués des composantes spectrales pures des faisceaux primaires.

Par essence, cette méthode est adaptée à des concentrations en bulles qui ne sont pas trop élevées, puisque le calcul mené par Sutin est basé sur le rayonnement d'une bulle unique. Nous avons donc mis en question la densité de bulles du nuage.

L'auteur définit un critère de validité de la méthode,

$$n(\mathbf{r}, R)dR\lambda^3 \ll 1 \quad (2.4)$$

où  $n(\mathbf{r}, R)dR$  est la densité de bulles de rayon  $R$  au point  $\mathbf{r}$ . De l'avis de Sutin, ce critère est satisfait pour la plupart des nuages de bulles, puisqu'il stipule qu'il ne doit pas y avoir plus d'une bulle résonante dans un cube de côté  $\lambda$ , ce qui mènerait à des fractions volumiques en air très importantes. Nous verrons plus loin que la densité du nuage de bulles que nous avons créé n'est pas en cause, puisque celle-ci est bien inférieure au pourcent.

Devant l'échec inexplicable de cette solution, nous avons modifié le dispositif expérimental de manière à l'adapter à une méthode de *bubble sizing* proposée par Newhouse et Shankar [33].

Dans ce premier article, les auteurs démontrent la possibilité de mesurer le diamètre de bulles de taille uniforme en profitant du comportement non-linéaire qui les caractérise quand elles sont insonifiées par un faisceau ultrasonore de fréquence  $f_2$  proche de la résonance. Sous l'influence combinée du faisceau "pompe" à basse fréquence  $f_2$  et d'un faisceau "imageur" de haute fréquence  $f_1$ , les bulles rayonnent aux fréquences somme et différence. Phelps et Leighon [34] donnent une explication simple de la production des signaux harmoniques : quand une bulle entre en résonance sous l'action du faisceau basse fréquence, sa section efficace de diffusion varie périodiquement. En conséquence, le faisceau imageur est diffusé avec une modulation d'amplitude qui suit l'évolution de la section de diffusion de la bulle. De fait, le produit des deux faisceaux génère les fréquences somme et différence.

Plus spécifiquement, Newhouse et Shankar montrent que l'amplitude des composantes spectrales à  $f_1 + f_2$  et  $f_1 - f_2$  passe par un maximum global quand la fréquence  $f_2$  correspond à la résonance d'une bulle dans la zone d'interaction. Cette caractéristique permet de relier l'amplitude de la composante spectrale  $f_1 + f_2$  quand la fréquence  $f_2$  balaye la gamme des fréquences résonantes à la fonction de distribution de la population de bulles.

Nous détaillons maintenant quelques étapes du raisonnement qui, dans un premier temps,

s'attache à décrire le rayonnement harmonique d'une bulle unique. L'équation différentielle de Rayleigh-Plesset (également appelée "équation RPNP" par Leighton), qui régit les oscillations d'une bulle, s'écrit ici :

$$\rho R \ddot{R} + \frac{3}{2} \rho \dot{R}^2 = \left( p_0 + \frac{2\sigma}{R_0} \right) \left( \frac{R_0}{R} \right)^{3\gamma} - \left( p_0 + \frac{2\sigma}{R} \right) - 4\eta \frac{\dot{R}}{R} + p_1 \cos \omega_1 t + p_2 \cos \omega_2 t \quad (2.5)$$

où  $R_0$  est le rayon d'une bulle à l'équilibre et  $R$  son rayon instantané,  $p_0$  la pression ambiante,  $\eta$  la viscosité du fluide,  $\sigma$  la tension de surface et  $p_1, p_2$  les amplitudes des pressions imposées par les faisceaux aux fréquences  $f_1$  et  $f_2$ .

La méthode consiste tout d'abord à développer cette équation pour de faibles oscillations du rayon, c'est-à-dire, pour  $R = R_0(1 + x)$  avec  $x \ll 1$ . On cherche ensuite une solution de la forme

$$\begin{aligned} x = & A_0 + A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \\ & + A_3 \cos(2\omega_1 t + \phi_3) + A_4 \cos(2\omega_2 t + \phi_4) \\ & + A_5 \cos((\omega_1 + \omega_2)t + \phi_5) + A_6 \cos((\omega_1 - \omega_2)t + \phi_6) \end{aligned} \quad (2.6)$$

avec  $\omega_1 = 2\pi f_1$  et  $\omega_2 = 2\pi f_2$ .

En injectant cette forme de solution dans l'équation 2.5, et en faisant l'hypothèse  $\omega_2 \ll \omega_1$ , Newhouse et Shankar obtiennent l'expression de la pression  $P_+$  à la fréquence  $f_1 + f_2$ , mesurée à la distance  $r$  de la zone d'interaction des deux faisceaux :

$$P_+ = \frac{\rho p_1 p_2}{(\rho \omega_0 R_0)^2} X_2 \frac{R_0}{r} \quad \text{où} \quad X_2 = \frac{1}{\sqrt{(1 - \omega_2^2/\omega_0^2)^2 + \delta^2(\omega_2^2/\omega_0^2)}} \quad (2.7)$$

avec  $\omega_0$  la fréquence de résonance de la bulle et  $\delta$  le facteur d'amortissement de la résonance. L'amplitude du signal diffusé à la fréquence  $f_1 + f_2$  est maximale quand  $\omega_2 = \omega_0$ . Il s'agit alors d'un maximum global, contrairement à la pression diffusée à la fréquence  $f_2$  (figure 2.6).

Dans ces conditions, les auteurs envisagent la possibilité de déterminer la fonction de distribution d'une population de bulles en enregistrant l'amplitude de la composante spectrale à  $f_1 + f_2$  en faisant varier la fréquence  $f_2$ .

Dans un second article [35], la capacité de la méthode à déterminer le profil de la distribution en rayons d'une population de bulles est précisément démontrée.

Quand  $\omega_2 = \omega_0$ , le terme  $X_2$  atteint son maximum ( $1/\delta$ ). De fait, si on considère que le produit  $\omega_0 R_0$  est constant, la pression mesurée à la fréquence somme en présence de bulles résonantes est proportionnelle à leur rayon  $R_0$ , et donc inversement proportionnelle à la fréquence  $f_2$ .

En l'absence de bulles résonantes dans le volume d'interaction pendant l'acquisition, la pression mesurée à la fréquence somme est nulle. La pression à la fréquence somme, moyennée sur les différentes acquisitions, est donc proportionnelle au nombre de bulles résonantes ayant traversé la zone d'interaction au cours de l'expérience.

Par conséquent, le profil d'amplitude de la composante spectrale à  $f_1 + f_2$ , moyennée sur

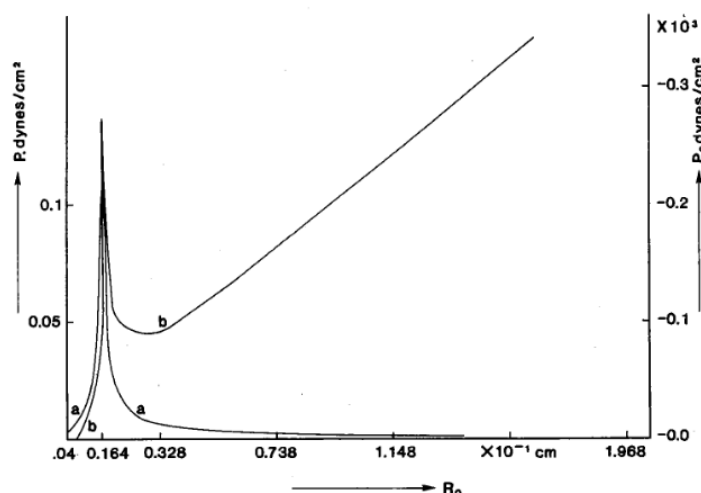


FIG. 2.6 – Evolution de la pression diffusée à la fréquence  $f_1 + f_2$  (courbe a) et  $f_2$  (courbe b) en fonction du rayon  $R_0$  d'une bulle. Figure issue de l'article original de Newhouse et Shankar.

plusieurs acquisitions pour chaque fréquence  $f_2$ , doit être multiplié par la fréquence  $f_2$  pour obtenir la fonction de distribution des rayons.

### Mise en oeuvre de la méthode

Par photographie, nous avons pu déterminer le rayon maximum des bulles produites par notre générateur à  $60 \mu\text{m}$ , tandis que leur plus petit rayon a pu être estimé à  $4 \mu\text{m}$  par étude du temps de détectabilité optique (section 2.1.1). Notons que cette mesure est peut-être faussée par les turbulences résiduelles du milieu, qui empêchent les plus petites bulles de remonter. Ce biais augmente le temps de séjour dans le milieu, et nous conduit à sous-estimer le rayon minimum de la distribution de bulles.

Pour évaluer la distribution d'une telle population de bulles, il serait nécessaire de sonder le milieu avec une onde acoustique de fréquence comprise entre 50 et 750 kHz. Dans la pratique, ceci n'est pas réalisable, à moins de posséder plusieurs transducteurs calibrés couvrant cette gamme de fréquences. Nous avons donc utilisé un unique transducteur, de fréquence centrale 500 kHz, dont la bande passante s'étend de 200 à 800 kHz, qui nous permet d'échantillonner la population de bulles de rayons compris entre  $4$  et  $15 \mu\text{m}$ . Cette technique est intéressante compte tenu de sa mise en oeuvre aisée, mais elle ne permet pas de couvrir une large plage de rayons, contrairement à la méthode à deux faisceaux de haute fréquence proposée par Sutin.

Dans cette gamme de rayons, nous avons vu que la relation classique de Minnaert reliant rayon et fréquence de résonance de la bulle devenait très approximative. Pour les bulles de rayon inférieur à  $100 \mu\text{m}$ , il faut en effet tenir compte de la tension de surface et de la variation du coefficient polytropique du gaz dans la bulle.

Ces deux phénomènes physiques ont des effets contraires, et nous avons la chance que ceux-ci se compensent dynamiquement dans la gamme de rayons considérée (voir la figure 2.7).

Dans le cadre de notre étude, la relation classique entre la fréquence de résonance  $f$  d'une

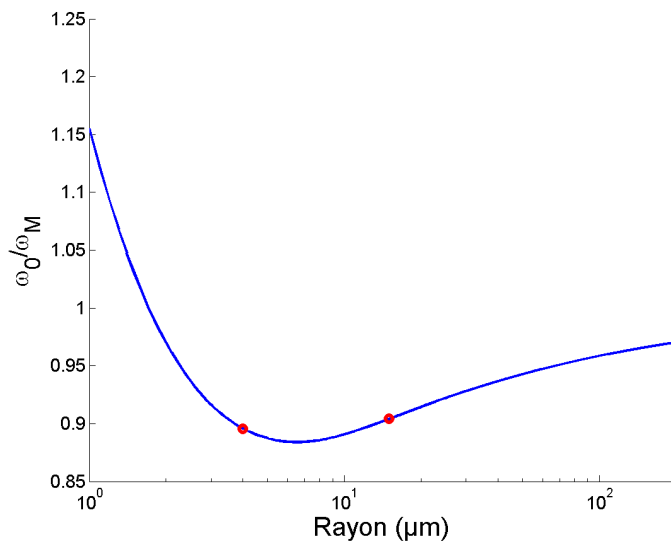


FIG. 2.7 – Evolution du rapport  $\omega_0/\omega_M$  en fonction du rayon de la bulle, où  $\omega_0$  est la pulsation de résonance de la bulle et  $\omega_M$  la pulsation de Minnaert. Dans la gamme de rayons entre 4 et 15  $\mu\text{m}$  (points rouges),  $\omega_0 \approx 0,9\omega_M$  à mieux que 2 %

bulle en kHz et son rayon  $R$  en millimètre doit donc être modifiée pour prendre en compte cet équilibre :  $fR = 0.9 \times 3.26 = 2.94$

### Dispositif expérimental

Dans cette expérience, le transducteur "pompe" est placé à 12 cm de la face avant du milieu bulleux, tandis que les deux transducteurs focalisés à 3,5 MHz conservent leur configuration à 90° (figure 2.8).

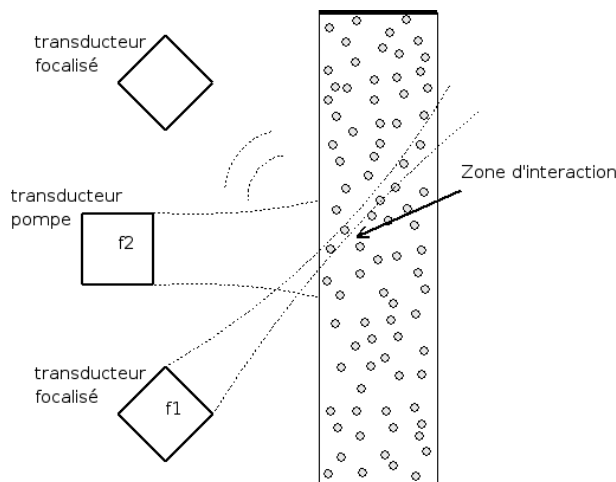


FIG. 2.8 – Dispositif expérimental de l'expérience d'interaction non-linéaire à deux faisceaux HF et BF.

Le transducteur de fréquence  $f_2$  ajustable est alimenté par un générateur de type HP33220A piloté par ordinateur. Préalablement à l'expérience, la bande passante de ce transducteur a été mesurée, de manière à compenser la perte d'efficacité aux fréquences extrêmes par une tension d'alimentation supérieure. Ainsi, l'amplitude du signal généré à chaque fréquence est constante

sur la gamme de fréquences allant de 200 à 800 kHz.

Le transducteur "imageur", de fréquence  $f_1$  constante (3,5 MHz), est excité avec une faible tension (moins de 1 VPP). La pression ainsi générée au point focal est inférieure au seuil permettant d'observer les effets liés à la pression de radiation.

Le deuxième transducteur focalisé est directement relié à un oscilloscope numérique. Sa sensibilité a également été déterminée préalablement à l'expérience, de manière à compenser les amplitudes mesurées aux fréquences harmoniques.

Pour chaque fréquence  $f_2$  entre 200 et 800 kHz, par pas de 10 kHz, nous réalisons 20 acquisitions de 100  $\mu$ s à une seconde d'intervalle. Nous présentons sur la figure 2.9 le spectre typique d'un signal enregistré en présence de bulles résonantes. Celui-ci laisse apparaître clairement les raies latérales aux fréquences somme et différence, ainsi que les ordres d'interaction supérieurs.

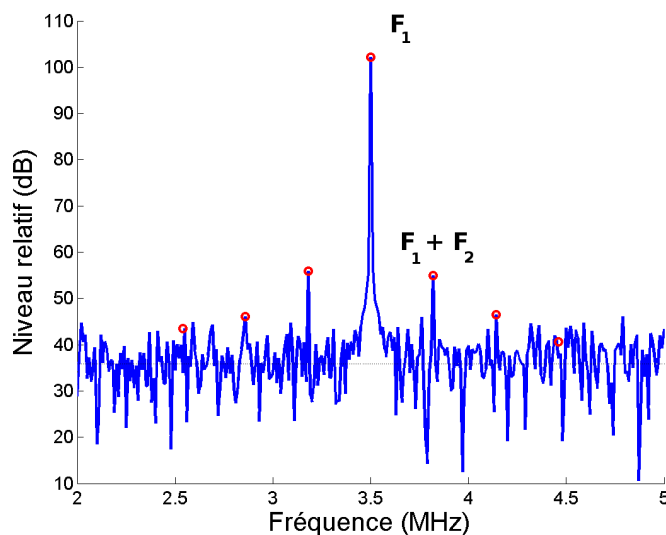


FIG. 2.9 – Spectre du signal mesuré en présence de bulles résonantes dans la zone d'interaction. Les raies aux fréquences  $f_1 - 3f_2$ ,  $f_1 - 2f_2$ ,  $f_1 - f_2$ ,  $f_1$ ,  $f_1 + f_2$ ,  $f_1 + 2f_2$  et  $f_1 + 3f_2$  ont été repérées par des points rouges. Le niveau moyen du bruit est matérialisé par un trait noir fin.

Pour chaque fréquence  $f_2$ , et pour chaque acquisition, nous relevons le niveau du bruit, ainsi que celui des raies spectrales à  $f_1 + f_2$  et  $f_1 + 2f_2$ . Si le niveau mesuré est supérieur au niveau de bruit additionné de son écart type, nous appliquons le facteur de correction de bande passante. Cette procédure évite de renforcer artificiellement le niveau du bruit quand aucune bulle résonante n'est présente dans la zone de détection. Le résultat est représenté en fonction de la fréquence  $f_2$  sur la figure 2.10.a.

Le niveau des harmoniques d'ordre élevé (en particulier  $f_1 + 2f_2$ ) semble ne pas dépendre de la population de bulles résonantes, puisque leur valeur est relativement constante sur toute la gamme de fréquences. En revanche, la composante spectrale somme présente une dépendance en fréquence importante, qui est caractéristique de la présence des bulles.

En appliquant la correction fréquentielle au spectre de la raie latérale à  $f_1 + f_2$ , nous obtenons finalement le profil de la fonction de distribution des tailles de bulles (figure 2.10.b).

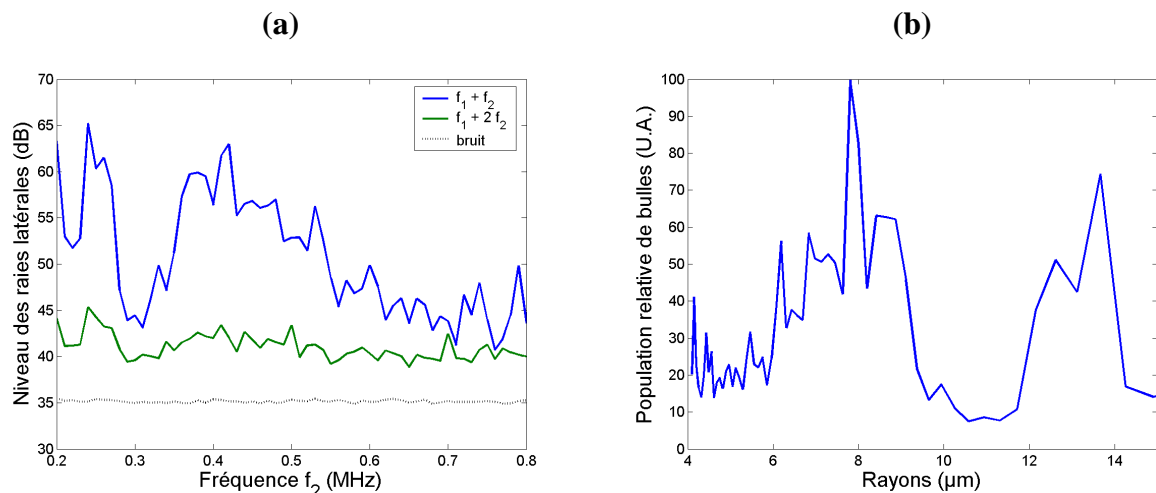


FIG. 2.10 – (a) Evolution de l’amplitude des signaux harmoniques à  $f_1 + f_2$  et  $f_1 + 2f_2$  en fonction de la fréquence  $f_2$ . (b) Population relative de bulles déduite de la composante spectrale à  $f_1 + f_2$ .

La population ainsi déterminée présente un creux manifeste pour les bulles de rayon compris entre 9 et 12 microns, dont nous attribuons l’origine à une instationnarité de la population de bulles sur le temps de l’acquisition. Nous verrons en effet que cette gamme de rayon correspond au maximum de la fonction de distribution des bulles, et qu’il n’y a donc pas de raison de mettre en cause un moyennage insuffisant des données. Nous confirmerons cette hypothèse ultérieurement, au vu de l’atténuation mesurée dans le nuage de bulles.

## 2.2 Onde cohérente

Dans cette section, nous cherchons à caractériser les propriétés acoustiques moyennes du milieu. Nous ne sommes plus en présence d’un milieu statique, tel que les échantillons de tiges que nous avons précédemment étudiés. L’acquisition de l’onde cohérente en est simplifiée, puisqu’il suffit d’attendre quelques instants pour que la configuration des diffuseurs soit totalement modifiée. Les moyennes d’ensemble sont donc remplacées par des moyennes temporelles.

Pour acquérir l’onde cohérente, le dispositif expérimental est constitué de deux transducteurs centrés à 500 kHz, disposés de part et d’autre du milieu délimité par les films de plastique. La tension d’électrolyse est fixée à 30 V. Visuellement, les bulles que l’on génère semblent de dimensions très homogènes.

Un générateur relié à l’émetteur délivre alors un signal bref, une période de sinus à 500 kHz, avec une fréquence de répétition de 1 Hz. On acquiert ainsi 180 signaux correspondant à des configurations distinctes des diffuseurs (figure 2.11.a).

Sur la figure 2.11.a, on peut tout d’abord constater que le temps d’arrivée du maximum de l’onde balistique présente des variations de l’ordre d’une microseconde d’une réalisation à

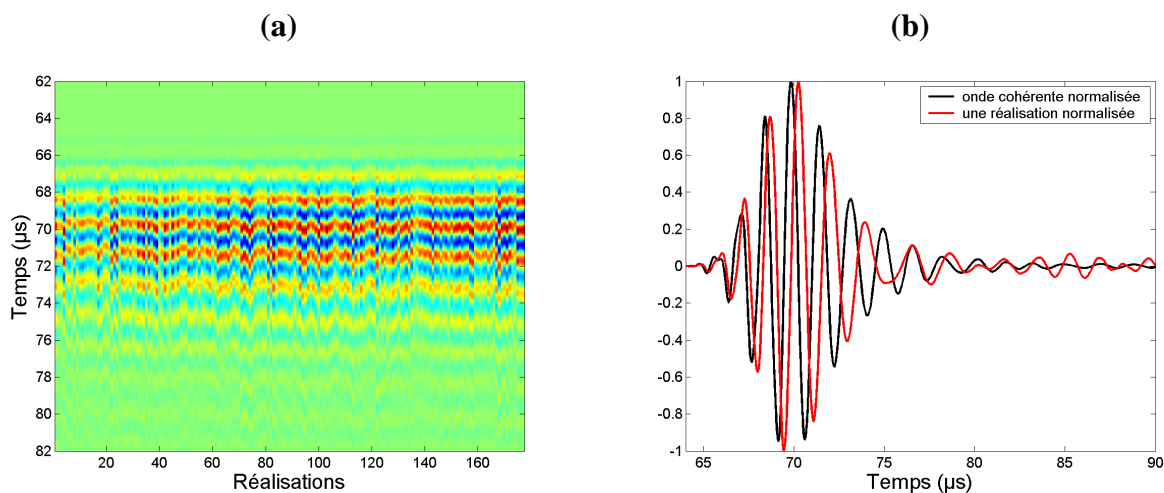


FIG. 2.11 – (a) Représentation des différentes acquisitions réalisées au cours du temps à travers le nuage de bulles. (b) Onde cohérente (noir) et une acquisition (rouge) superposées. L'onde cohérente est ici agrandie d'un facteur  $\approx 2$ .

l'autre. Cela traduit peut-être une légère inhomogénéité du milieu, malgré le brassage assuré par la circulation du flux d'eau.

En dépit de ces faibles variations, chaque acquisition "ressemble" à l'onde cohérente (figure 2.11.b) : le milieu est alors dit automoyennant. La contribution incohérente est en effet presque inexistante, et l'onde balistique sur une réalisation présente de fortes similitudes avec l'onde cohérente.

Cela semble être une caractéristique intrinsèque au nuage de bulles que nous avons créé. En effet, nous pouvons éliminer l'hypothèse d'un moyennage spatial, puisque les dimensions du transducteur en réception sont de l'ordre de la longueur d'onde. Le mouvement des diffuseurs n'est pas plus en cause, puisque l'on peut enregistrer le même genre de signaux quand la circulation d'eau est coupée pendant un court instant.

L'onde cohérente subit une atténuation importante par rapport à l'onde transmise dans l'eau (figure 2.12.b). Cette atténuation est effective sur tout le spectre des fréquences émises, mais de manière plus prononcée autour de 340 kHz, où elle atteint 90 dB sur une épaisseur de 5 cm. Le nuage de bulles réalise donc un filtrage fréquentiel important, qui a pour conséquence l'allongement de l'impulsion transmise (figure 2.12.a). L'atténuation diminue ensuite jusqu'à la valeur de 10 dB, que nous mesurons à 900 kHz.

## 2.3 Modèle de Foldy

En 1945, Leslie Foldy publie un article sur la diffusion multiple des ondes scalaires par une collection de diffuseurs ponctuels isotropes [1]. L'approche est innovante, puisque les pro-



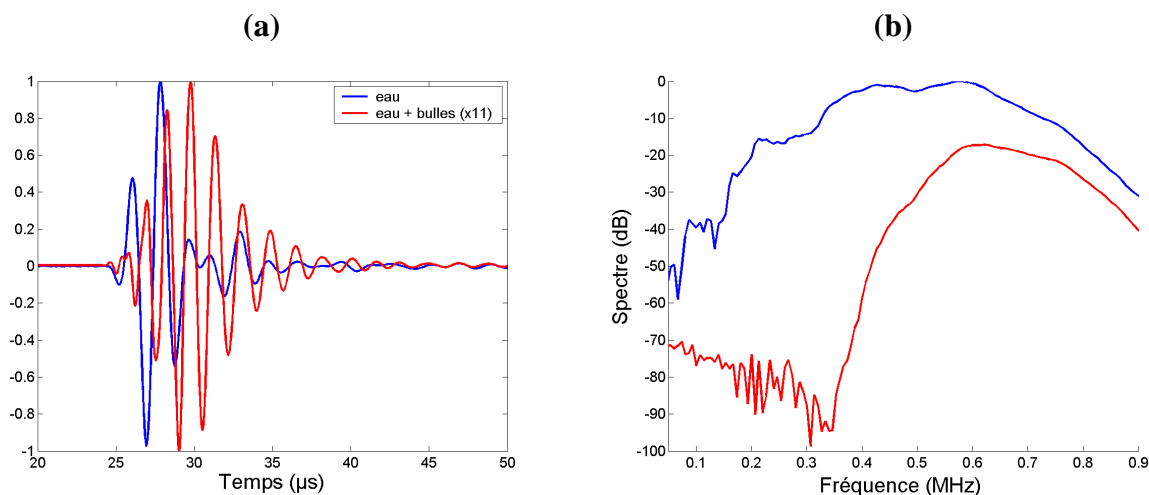


FIG. 2.12 – **(a)** Onde cohérente enregistrée à travers le nuage de bulles (rouge), agrandie d'un facteur 11. Signal enregistré en transmission dans l'eau (bleu). **(b)** Contenu fréquentiel des signaux cohérents enregistrés dans le nuage de bulles (rouge) et dans l'eau (bleu).

blèmes de diffusion multiple étaient jusqu'alors traités en assimilant les ondes à des corpuscules, ce qui revenait à négliger les phénomènes d'interférences. L'apport essentiel de cet article est l'obtention de la relation de dispersion qui régit la propagation de l'onde cohérente dans une assemblée de diffuseurs.

Cet article fait office de référence en la matière, même si le modèle qu'il propose s'est vu amendé de nombreuses contributions au cours des années qui ont suivi [36, 37, 38].

Dans cet article, Foldy s'intéresse tout d'abord à la moyenne sur le désordre de la solution  $\Psi$  de l'équation de propagation. Il démontre dans un premier temps que  $\langle \Psi \rangle$  est solution de l'équation d'onde dans un milieu homogène sans diffuseurs, de vitesse et atténuation renormalisées. Il s'agit du milieu effectif, que nous avons déjà évoqué pour introduire la notion de libre parcours moyen élastique.

Nous allons ici présenter dans le détail les calculs de Foldy qui mènent à l'expression du champ cohérent.

A chaque diffuseur, on associe un paramètre caractérisant son pouvoir de diffusion, que l'on appelle  $s$ . Dans notre application, ce paramètre est le rayon de la bulle, qui conditionne sa réponse en fréquence.

Un arrangement spatial particulier de diffuseurs est appelé configuration. Toute configuration est définie par la position et le paramètre de diffusion de chacun des  $N$  diffuseurs, et on la note  $(\vec{r}_1 \dots \vec{r}_N, s_1 \dots s_N)$ . On définit ensuite la densité de probabilité  $P$  de l'ensemble des diffuseurs dans une configuration donnée. La probabilité de trouver le système de diffuseurs dans une configuration est donc donnée par  $P(\vec{r}_1 \dots \vec{r}_N, s_1 \dots s_N) d^3 r_1 \dots d^3 r_N ds_1 \dots ds_N$ .

La moyenne sur le désordre d'une quantité physique  $Q$  mesurable sur chaque configuration

s'écrit :

$$\langle Q \rangle = \int_{\vec{r}_1 \in V} \dots \int_{\vec{r}_N \in V} \int_{s_1} \dots \int_{s_N} Q(\vec{r}_1 \dots \vec{r}_N, s_1 \dots s_N) P(\vec{r}_1 \dots \vec{r}_N, s_1 \dots s_N) d^3 r_1 \dots d^3 r_N ds_1 \dots ds_N$$

Une première approximation consiste à utiliser des distributions de probabilité égales pour chaque diffuseur et indépendantes entre elles. Dans ce modèle, il n'y a pas de distance d'exclusion et les diffuseurs sont supposés ponctuels. On peut alors écrire

$$P(\vec{r}_1 \dots \vec{r}_N, s_1 \dots s_N) = \frac{n(\vec{r}_1, s_1)}{N} \dots \frac{n(\vec{r}_N, s_N)}{N} \quad (2.8)$$

où  $n(\vec{r}, s)ds$  est le nombre moyen de diffuseurs par unité de volume ayant un paramètre de diffusion entre  $s$  et  $s + ds$  au point  $\vec{r}$ . On vérifie alors que

$$N = \int_{\vec{r} \in V} \int_s n(\vec{r}, s) ds d^3 r \quad (2.9)$$

Pour une configuration donnée des diffuseurs, le champ en  $\vec{r}$  s'écrit classiquement comme la somme du champ incident et des ondes sphériques issues de tous les diffuseurs :

$$\Psi(\vec{r}) = \Psi_0(\vec{r}) + \sum_j A_j E(\vec{r}, \vec{r}_j) \quad (2.10)$$

où  $E(\vec{r}, \vec{r}_j) = \exp(-ik_o|r - r_j|)/|r - r_j|$  est une onde sphérique divergente issue de  $r_j$ .  $A_j$  est un coefficient de pondération de l'amplitude de l'onde sphérique, qui s'exprime comme le produit de l'amplitude du champ incident sur le diffuseur  $j$  :  $\Psi^j(\vec{r}_j)$ , et de la fonction de diffusion  $f(s_j, \omega)$  spécifique au diffuseur  $j$  :

$$A_j = \Psi^j(\vec{r}_j) f(s_j, \omega) \quad (2.11)$$

Le champ incident sur le diffuseur  $j$ ,  $\Psi^j(\vec{r}_j)$  s'exprime d'après 2.10 :

$$\Psi^j(\vec{r}_j) = \Psi_0(\vec{r}_j) + \sum_{j' \neq j} A_{j'} E(\vec{r}_j, \vec{r}_{j'}) \quad (2.12)$$

Les équations 2.10, 2.11 et 2.12, que nous avons résolues numériquement pour un nombre fini et raisonnable de diffuseurs (section 3.3), constituent le système de base pour étudier les phénomènes de diffusion multiple. Ici, le nombre  $N$  de diffuseurs est trop important pour qu'il soit possible de le résoudre numériquement.

De plus, nous cherchons à exprimer des quantités moyennées sur le désordre, telles que  $\langle \Psi(\vec{r}) \rangle$ . Pour cela, nous calculons la moyenne sur le désordre des termes de l'équation 2.10 :

$$\begin{aligned} \langle \Psi(\vec{r}) \rangle &= \langle \Psi_0(\vec{r}) \rangle + \sum_j \int_{\vec{r}_j, s_j, i \in [1, \dots, N]} f(s_j, \omega) \Psi^j(\vec{r}_j) E(\vec{r}, \vec{r}_j) \prod_i \frac{n(\vec{r}_i, s_i)}{N} d^3 r_i ds_i \\ &= \Psi_0(\vec{r}) + \sum_j \int_{\vec{r}_j, s_j} f(s_j, \omega) \left[ \int_{\vec{r}_i, s_i, i \neq j} \Psi^j(\vec{r}_j) \prod_{i \neq j} \frac{n(\vec{r}_i, s_i)}{N} d^3 r_i ds_i \right] E(\vec{r}, \vec{r}_j) \frac{n(\vec{r}_j, s_j)}{N} d^3 r_j ds_j \end{aligned}$$

On note  $\langle \rangle_j$  une moyenne sur le désordre portant sur les positions de tous les diffuseurs sauf le  $j$  ème. L'équation précédente s'écrit alors

$$\langle \Psi(\vec{r}) \rangle = \Psi_0(\vec{r}) + \sum_j \int_{\vec{r}_j, s_j} f(s_j, \omega) \langle \Psi^j(\vec{r}_j) \rangle_j E(\vec{r}, \vec{r}_j) \frac{n(\vec{r}_j, s_j)}{N} d^3 r_j ds_j \quad (2.13)$$

En posant  $F(\vec{r}_j) = \int_{s_j} f(s_j, \omega) n(\vec{r}_j, s_j) ds_j$  et en remarquant que tous les termes de la somme discrète sur  $j$  sont identiques, on obtient :

$$\langle \Psi(\vec{r}) \rangle = \Psi_0(\vec{r}) + \int_{\vec{r}_j} F(\vec{r}_j) \langle \Psi^j(\vec{r}_j) \rangle_j E(\vec{r}, \vec{r}_j) d^3 r_j \quad (2.14)$$

La quantité  $\langle \Psi^j(\vec{r}_j) \rangle_j$  représente le champ incident sur le diffuseur  $j$  moyenné sur toutes les configurations possibles des autres diffuseurs. La deuxième approximation de Foldy consiste à remplacer son expression par la moyenne du champ évalué au point  $\vec{r}_j$ , comme si ce diffuseur était absent.

L'application de l'opérateur  $(\nabla^2 + k_0^2)$  à chacun des membres de cette nouvelle équation donne alors :

$$(\nabla^2 + k_0^2) \langle \Psi(\vec{r}) \rangle = 0 + \int_{\vec{r}'} F(\vec{r}') \langle \Psi^j(\vec{r}') \rangle_j (-4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}')) d^3 r' \quad (2.15)$$

soit :

$$(\nabla^2 + k_0^2 + 4\pi F(\vec{r})) \langle \Psi(\vec{r}) \rangle = 0 \quad (2.16)$$

L'onde cohérente obéit donc à l'équation d'onde dans un milieu homogène, dont la relation de dispersion est modifiée par la présence des diffuseurs :

$$k^2(\omega) = k_0^2(\omega) + 4\pi F(r) \quad (2.17)$$

$$= k_0^2(\omega) + 4\pi \int_s f(s, \omega) n(\vec{r}, s) ds \quad (2.18)$$

Si tous les diffuseurs sont identiques, la relation de dispersion s'écrit  $k^2(\omega) = k_0^2(\omega) + 4\pi N f(\omega)$ , où  $N$  désigne le nombre de diffuseurs par unité de volume.

L'onde cohérente se déplace donc dans un milieu de vitesse de phase  $\omega/\Re(k)$ , et subit une atténuation de  $20\Im(k) \log_{10}(e)$  dB/m, qui est liée à la partie imaginaire de la fonction de diffusion.

Les premiers efforts expérimentaux de validation de cette théorie n'ont pas attendu très longtemps, puisque Cartensen publie en 1947 un article expérimental dans lequel il étudie les coefficients de réflexion et de transmission d'une onde plane incidente sur un nuage de bulles sub-millimétriques [39]. Depuis cette date, d'autres études expérimentales ont cherché à obtenir des données plus précises concernant la vitesse de phase et l'atténuation, en particulier aux fréquences du régime résonant [17, 40, 41, 42]. Le modèle de Foldy repose en effet sur plusieurs approximations, dont la validité est toujours en question pour des nuages de bulles très denses, et pour des populations de bulles très monodisperses proches de la résonance. Dans

sa thèse, Valentin Leroy obtient un critère de validité du modèle de Foldy pour un nuage monodisperse [43] : le rapport entre le rayon des bulles et la distance moyenne entre bulles doit être très inférieur à la constante d'amortissement à la résonance  $\delta$ . Pour des bulles de rayon  $10\ \mu\text{m}$ ,  $\delta \approx 0,1$ , ce qui conduit à une distance moyenne entre bulles très grande devant  $0,1\ \text{mm}$ . Dans un nuage polydisperse de bulles, la fraction volumique de bulles de  $10\ \mu\text{m}$  simultanément résonantes doit donc être très inférieure à  $0,4\ \%$  pour que le modèle de Foldy soit valide.

En utilisant la relation de dispersion calculée au moyen du modèle de Foldy (équation 2.17) avec la fonction de diffusion d'une bulle prenant en compte les processus d'amortissement (équation 1.19), nous représentons sur la figure 2.13 la vitesse de phase effective et l'atténuation de l'onde cohérente dans un nuage dense de bulles de rayon  $10\ \mu\text{m}$  ( $f = 0,1\ \%$ ) et dans un nuage dilué ( $f = 4,2 \cdot 10^{-8}$ ).

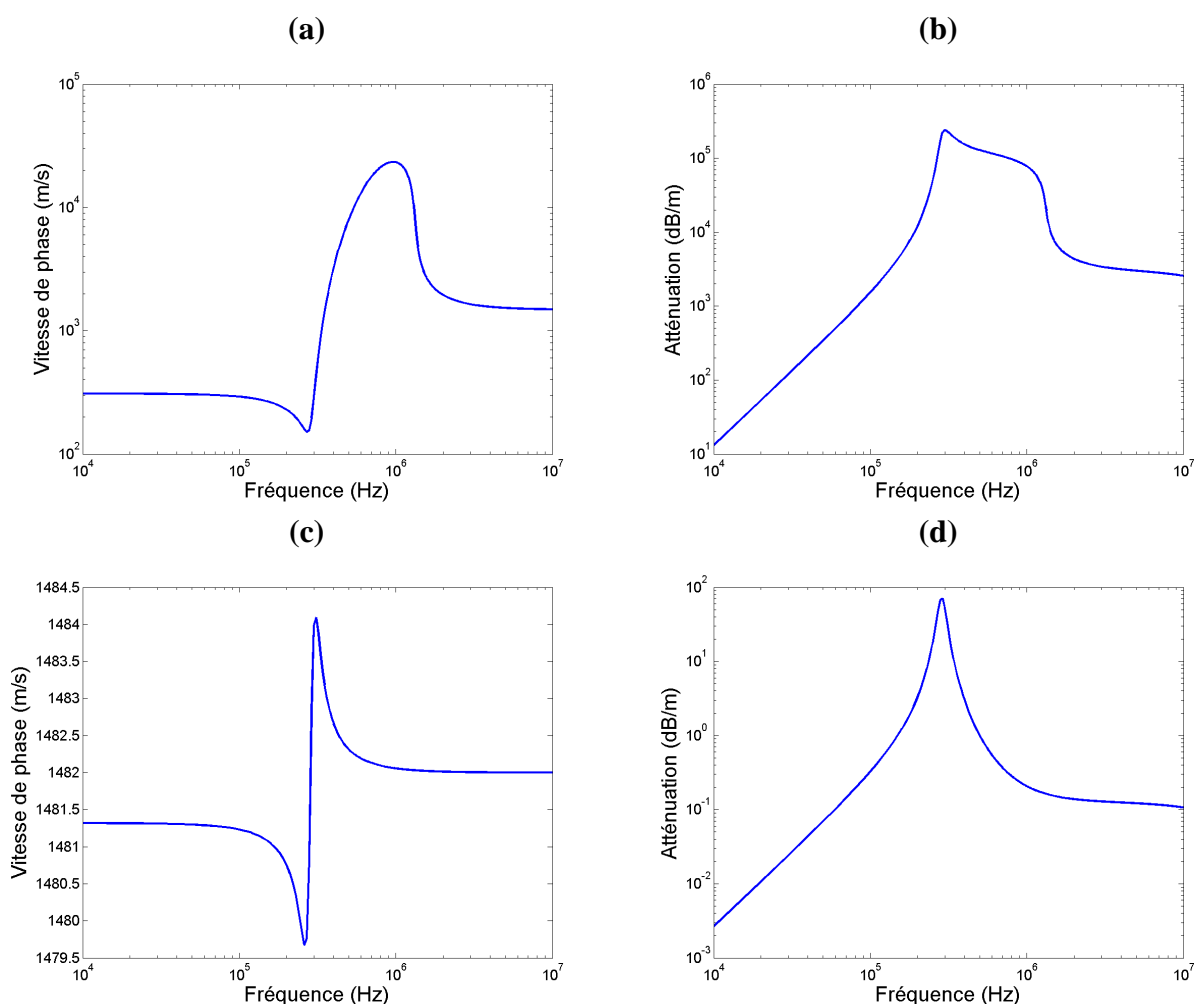


FIG. 2.13 – Vitesse de phase effective (figure **a**) et atténuation (figure **b**) de l'onde cohérente en fonction de la fréquence dans un liquide contenant une fraction volumique d'air de  $0,1\ \%$  avec des bulles de rayon  $10\ \mu\text{m}$  (soit  $2,4 \cdot 10^{11}$  bulles/ $\text{m}^3$ ). Figures **c** et **d** : idem avec une concentration plus faible ( $10^7$  bulles/ $\text{m}^3$ ).

A basse fréquence devant la résonance des bulles (290 kHz), la vitesse de phase est identique à celle donnée par la loi de Wood (300 m/s pour le nuage dense), tandis qu'à haute fréquence, on retrouve la valeur de la vitesse dans l'eau (1500 m/s). Autour de la fréquence de résonance d'une bulle unique, le milieu est très dispersif et l'atténuation est maximale.

Dans un nuage peu dense, l'atténuation reste importante (100 dB/m), et localisée à la résonance, alors que la vitesse de phase diffère peu de la vitesse dans l'eau. Dans ces conditions, on peut intuitivement relier l'atténuation mesurée en transmission à une fréquence à la présence de bulles résonantes à cette même fréquence. Au vu de l'atténuation que nous avons mesurée en transmission sur le nuage de bulles (figure 2.12.b), et en faisant l'hypothèse d'un milieu peu dense\*\*, cette constatation donne une première indication sur la taille des bulles majoritairement présentes. La fréquence correspondant à l'atténuation maximale (340 kHz) correspond en effet à des bulles résonantes de rayon 8,5 microns.

## 2.4 Détermination de la fraction volumique d'air

A ce stade, nous disposons de la forme de la fonction de distribution des bulles, mais cette information reste incomplète tant que nous ne pouvons estimer la densité de bulles pour tout rayon. Le modèle de Foldy nous donne cette possibilité, et nous autorise par là-même à déterminer la fraction volumique d'air dans le nuage de bulles.

A partir du moment où nous admettons la validité du modèle de Foldy (ce que nous vérifierons *a posteriori*), il est possible de choisir comme paramètre d'entrée du modèle la forme de la fonction de distribution que nous avons obtenue expérimentalement grâce à la méthode non-linéaire de Newhouse et Shankar.

En comparant l'atténuation que nous avons mesurée sur l'onde cohérente (figure 2.12.b) et l'atténuation résultant de l'application du modèle de Foldy, nous sommes en mesure de déterminer complètement la population de bulles dans la gamme de rayons considérée. Il suffit en effet d'ajuster l'unique variable du problème, à savoir le facteur multiplicatif de la concentration en bulles, pour reproduire l'atténuation mesurée expérimentalement.

Le meilleur ajustement de l'atténuation expérimentale est obtenu pour une concentration en bulles de rayon 7,8 microns de  $6.10^7$  bulles/m<sup>3</sup> (figure 2.14.a). La fonction de distribution de la population de bulles de rayons compris entre 4 et 15  $\mu\text{m}$  est alors intégralement déterminée (figure 2.14.b). La densité de bulles produites par notre dispositif à électrolyse est du même ordre de grandeur que celle obtenue par Sutin avec un dispositif similaire [32].

Dans la gamme de fréquence qui s'étend de 400 à 700 kHz, l'atténuation est correctement reproduite par le modèle, ce qui valide la distribution de bulles de rayons compris entre 4,1 et 7,2  $\mu\text{m}$ .

En revanche, cet ajustement met en évidence les carences de la mesure non-linéaire de la population de bulles dont les rayons sont compris entre 9 et 12  $\mu\text{m}$ . Nous avons en effet montré que l'atténuation à une fréquence était reliée à la population de bulles résonantes à cette même

---

\*\*hypothèse dont nous aurons la confirmation au paragraphe suivant

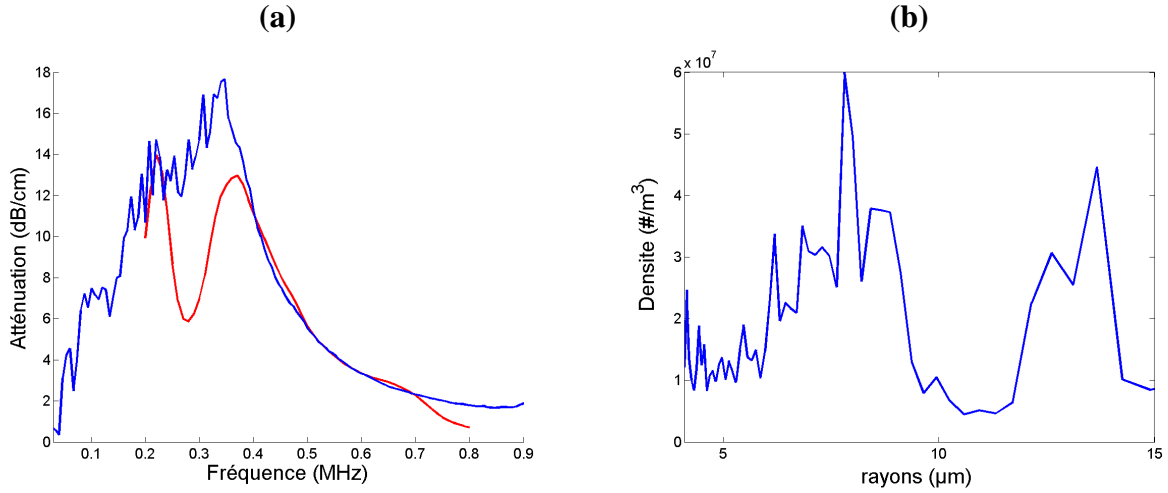


FIG. 2.14 – (a) : En bleu, l'atténuation mesurée expérimentalement à travers le nuage de bulles. En rouge, l'atténuation calculée au moyen du modèle de Foldy en prenant en compte la forme de la fonction de distribution de la population de bulles, et ajustée à la courbe bleue en jouant sur la densité maximale de bulles. La courbe rouge est limitée dans son extension aux fréquences du faisceau "pompe" de la méthode non-linéaire de *bubble sizing*. (b) : fonction de distribution résultant de l'ajustement.

fréquence. Le creux dans la distribution de la population de bulles autour de 10 microns est donc responsable de la chute d'atténuation autour de 300 kHz sur la courbe rouge de la figure 2.14.a.

Au dessus de 700 kHz, la densité de bulles résonantes déterminée par la méthode non-linéaire semble également légèrement déficiente. Cela est à rapprocher des résultats de l'article de Chapelon qui suggère que le rayon des plus petites bulles détectables est conditionné par les mouvements propres du liquide bulleux [35]. Ceux-ci ont un effet d'entraînement sur les petites bulles, et contrebalancent la pression de radiation qui serait susceptible d'éjecter ces petites bulles en dehors de la zone d'interaction. Il est donc possible que les bulles de rayon inférieur à  $4,1 \mu\text{m}$  ne soient pas correctement détectées par notre dispositif, du fait de la pression de radiation.

En dépit de ces artefacts, il est possible d'estimer la fraction volumique de bulles en intégrant la fonction de distribution entre  $R_{min} = 4 \mu\text{m}$  et  $R_{max} = 15 \mu\text{m}$  :

$$f = \int_{R_{min}}^{R_{max}} \frac{4\pi R^3 n(R)}{3} dR = 3,6 \cdot 10^{-6} \quad (2.19)$$

Ce chiffre est globalement sous-estimé, puisqu'il ne prend pas en compte la population de bulles de rayons autour de 10 microns. Les bulles de rayon supérieur à 15 microns ne sont également pas comprises dans cette fraction volumique.

L'ordre de grandeur de la densité de bulles est en revanche correct, et se trouve dans les

limites de validité du modèle de Foldy. Les bulles en plus grand nombre, de rayon 7,8 microns, représentent à elles seules une fraction volumique de  $1,2 \cdot 10^{-7}$  pour laquelle la condition  $R_0/d \gg \delta$  est largement respectée. Dans ces conditions, le modèle de Foldy de propagation de l'onde cohérente n'est pas remis en cause.

## 2.5 Diffusion multiple et non-linéarités

Les caractéristiques de la population de bulles que nous avons générée sont désormais mieux connues. Conformément à l'objectif que nous nous sommes fixés, nous créons des bulles dont les résonances interviennent autour de 300 kHz. En contrepartie, la densité de bulles est très inférieure à celle que nous avons déterminée en section 1.3 pour observer un régime de diffusion multiple intéressant.

Ce nuage de bulles est en revanche idéal pour étudier le régime de propagation non-linéaire à ces fréquences, puisque les diffuseurs présentent alors une efficacité de génération harmonique importante. Les non-linéarités que nous cherchons à mettre en évidence sont en effet celles dues aux diffuseurs, plutôt que celles dues à la propagation dans le milieu hôte.

En optique, cette situation a été récemment étudiée d'un point de vue théorique par Wellens *et al.* [44]. Du fait des non-linéarités qui interviennent au cours des événements de diffusion, des phénomènes observés dans le cadre de la diffusion multiple en régime linéaire, tels que l'effet de rétrodiffusion cohérente, s'en trouvent alors enrichis.

D'un point de vue purement expérimental, nous chercherons à mettre en évidence la présence d'harmoniques dans la contribution incohérente au signal transmis. Leur détection traduirait en effet la présence de non-linéarités dans les oscillations des bulles, qui se propageraient au sein du nuage en étant multiples diffusées.

### 2.5.1 Sur le milieu caractérisé

Pour mettre en évidence la diffusion multiple, nous avons tout d'abord réalisé des expériences en transmission. Si les ordres de diffusion sont élevés et l'absorption faible, la contribution incohérente au signal transmis peut s'étaler sur des durées importantes [45].

Dans la plage de fréquences accessibles avec un transducteur centré autour de 500 kHz, nous avons vu que l'onde cohérente était très proche de l'onde mesurée en transmission sur une réalisation du désordre. Il n'y a donc pas d'espoir de combiner diffusion multiple et non-linéarités à cette fréquence. Nous représentons à nouveau ces signaux, ainsi que ceux acquis à 3,5 MHz, à l'échelle du signal transmis dans l'eau, sur la figure 2.15.

Sur la figure 2.15, il faut tout d'abord constater que les signaux acquis sur une réalisation du désordre à 3,5 MHz présentent également de fortes similitudes avec l'onde cohérente à cette même fréquence. Le caractère automoyennant du milieu de propagation se manifeste donc non seulement à des fréquences proches de la résonance des bulles (500 kHz), mais également à plus haute fréquence.

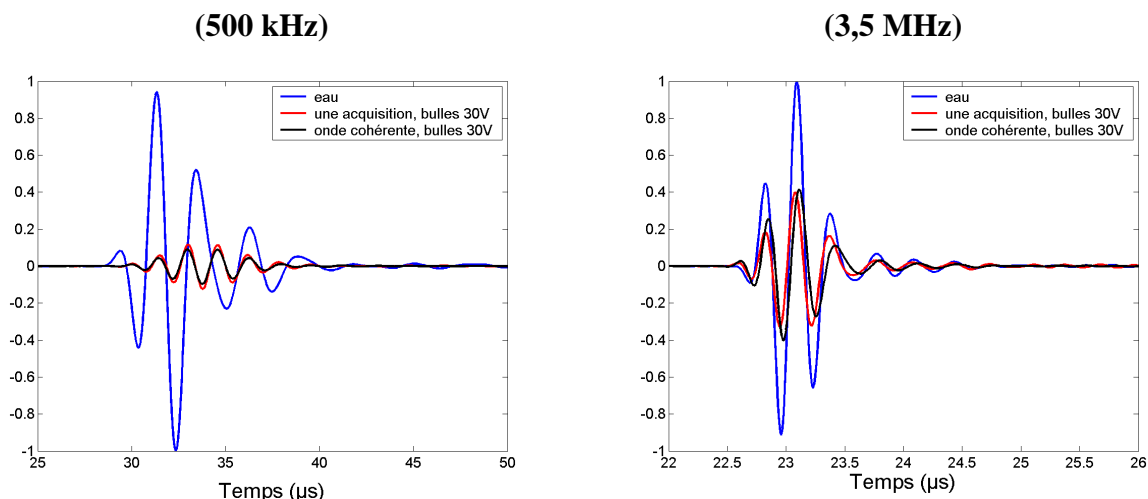


FIG. 2.15 – Signaux mesurés en transmission à 500 kHz et 3,5 MHz dans l’eau (bleu) et sur le milieu bulleux créé avec 2 fils de platine alimentés en 30 V (une acquisition en rouge, onde cohérente en noir).

En comparant le maximum de l’onde cohérente dans le milieu bulleux au maximum d’amplitude transmise dans l’eau, il est possible de déterminer le libre parcours moyen  $l$  de l’onde dans le nuage de bulles. Celui-ci combine l’atténuation de l’onde due à la diffusion (reliée au libre parcours moyen élastique  $l_e$ ) et l’atténuation due à l’absorption (reliée au libre parcours moyen d’absorption  $l_a$ ) :

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{l_e} + \frac{1}{l_a} \quad (2.20)$$

Rappelons que le libre parcours moyen est la distance caractéristique de décroissance de l’intensité cohérente. On le détermine traditionnellement en mesurant la décroissance exponentielle de l’intensité cohérente sur plusieurs échantillons d’épaisseur différente. Ici, notre dispositif expérimental ne nous permet pas de modifier l’épaisseur du milieu, et nous devons donc nous contenter d’une seule mesure pour l’obtenir.

Si on note  $L$  l’épaisseur du milieu<sup>††</sup>,  $A_0$  l’amplitude maximale du signal transmis dans l’eau et  $A$  l’amplitude maximale du signal transmis à travers le nuage de bulles, on calcule le libre parcours moyen avec la formule suivante :

$$l = \frac{L}{2 \ln (A_0/A)} \quad (2.21)$$

Dans le nuage de bulles créé avec une tension d’électrolyse de 30 V, nous mesurons un libre parcours moyen de 11 mm à 500 kHz et 29 mm à 3,5 MHz.

L’absence de contribution incohérente significative, ainsi que la forte réduction de l’amplitude du signal balistique que nous observons sur la figure 2.15 nous indiquent que l’absorption

<sup>††</sup>Nous voyons ici l’intérêt du confinement du nuage de bulles dans un espace délimité.



est majoritaire à 500 kHz, ce qui signifie que le libre parcours moyen que nous mesurons est essentiellement dû à l'absorption et non à la diffusion.

Compte tenu de la distribution des rayons des bulles que nous avons déterminée sur ce milieu, cette constatation est confirmée par l'étude que nous avons menée dans le premier chapitre. A 500 kHz, une fraction importante de la population de bulles est encore proche de la résonance, ce qui est source de beaucoup d'absorption. Les signaux transmis à 500 kHz (figure 2.15) témoignent d'ailleurs du caractère dispersif du milieu de bulles à cette fréquence, et donc de la proximité des résonances.

A 3,5 MHz, l'atténuation du balistique est moins forte et la contribution incohérente au signal transmis est supérieure à celle mesurée à 500 kHz (figure 2.16). Cette expérience confirme l'idée que les fréquences supérieures d'un facteur 10 à la résonance deviennent favorables à l'étude de la diffusion multiple dans les nuages de bulles.

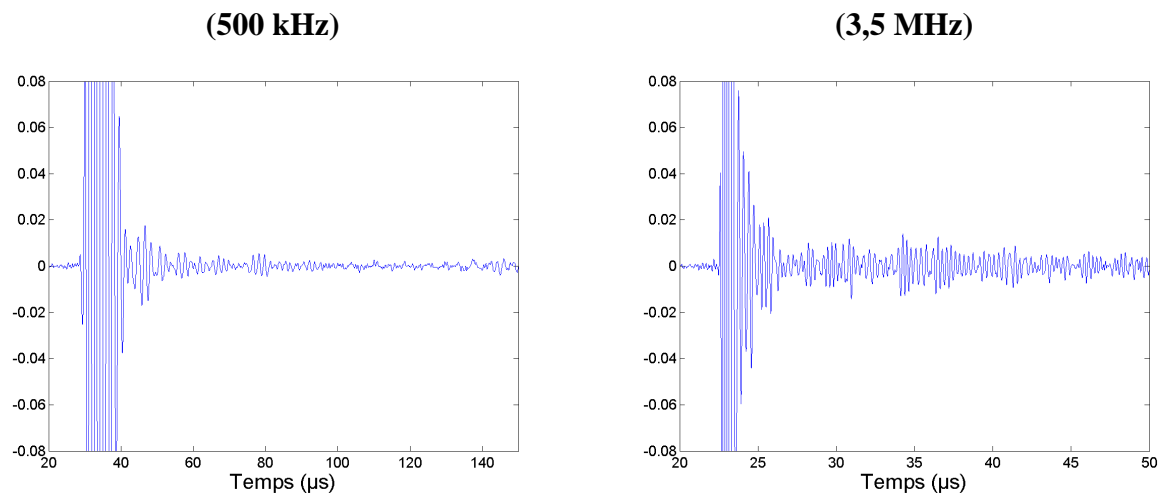


FIG. 2.16 – Signaux mesurés en transmission à 500 kHz et 3,5 MHz dans le nuage de bulles créé avec 2 fils de platine alimentés en 30 V. Le balistique est normalisé à 1, de manière à mettre en évidence la faible contribution incohérente.

En mesurant la transmission de l'échantillon aux plus hautes fréquences accessibles expérimentalement, nous évitons l'absorption. La contrepartie est que les diffuseurs sont peu efficaces (sections efficaces géométriques). Il est donc nécessaire d'augmenter la densité du milieu si nous souhaitons observer de la diffusion multiple.

Pour étudier la non-linéarité de ce premier milieu de propagation, nous avons insonifié le nuage de bulles en régime impulsionnel au moyen d'un transducteur plan à 400 kHz. Un générateur programmable de type Agilent 33220A est utilisé pour créer un signal de 20 périodes modulé par une fenêtre de Hanning. La réception est assurée par un hydrophone ponctuel de bande passante suffisante, relié à un préamplificateur de type Panametrics 5670. Le signal est ensuite numérisé sur 12 bits avec une fréquence d'échantillonnage de 100 MHz.

A 400 kHz, nous avons acquis l'onde cohérente dans le nuage de bulles en réalisant une centaine de moyennes d'ensemble. Nous présentons les spectres des signaux enregistrés dans l'eau et dans le milieu bulleux sur la figure 2.17. Les expériences ont été répétées avec deux tensions d'alimentation du transducteur source : 5V et 10V.

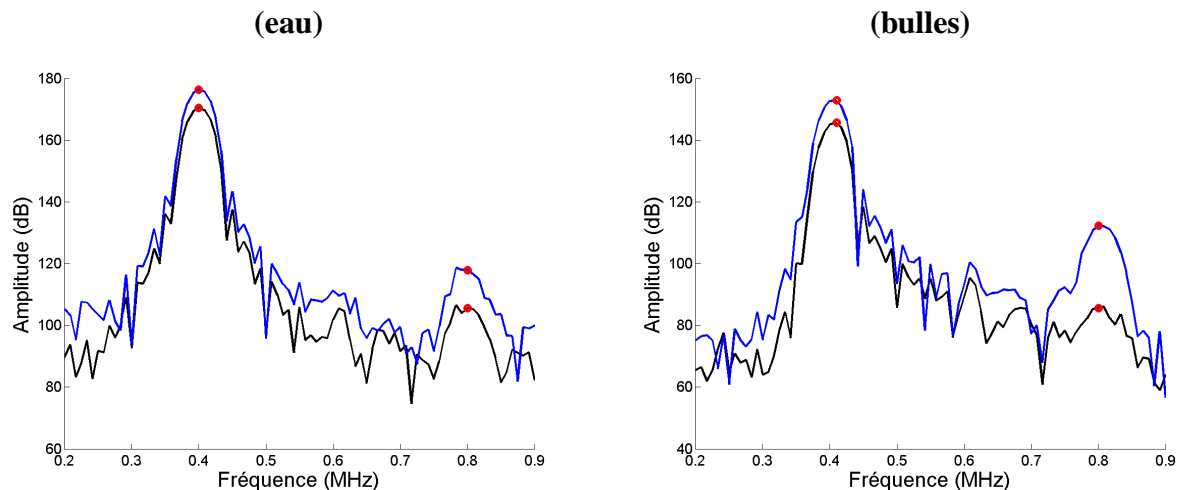


FIG. 2.17 – Spectre des signaux à 500 kHz moyennés, enregistrés dans l'eau et dans le nuage de bulles pour une tension de tir de 5 V (noir) et 10V (bleu). Les niveaux du fondamental et de l'harmonique sont repérés par des points rouges. Entre les deux tensions de tir, on relève un gain de 11 dB sur l'harmonique dans l'eau, contre 23 dB dans le nuage de bulles.

Dans l'absolu, le niveau de l'harmonique mesuré en transmission dans le nuage de bulles est inférieur à celui mesuré dans l'eau : 112 dB contre 120 dB. Cela peut s'expliquer tout d'abord par l'absorption intrinsèque du nuage à 800 kHz (de l'ordre de 10 dB), mais également par l'absorption du faisceau principal à 400 kHz, ce qui occasionne une efficacité de génération harmonique plus faible.

En revanche, le doublement de la tension du transducteur source occasionne un gain de 11 dB à l'harmonique dans l'eau, contre 23 dB dans le nuage de bulles. Si les phénomènes qui sont à la base de la génération harmonique dans les milieux continus permettent d'expliquer le gain de 11 dB dans l'eau, la différence entre 11 et 23 dB est intégralement due à la présence de bulles proches de leur résonance.

A 3.5 MHz, le gain à l'harmonique quand on double la tension de tir est de 11 dB dans l'eau, et seulement de 13 dB en présence des bulles (figure 2.18). Cette expérience confirme donc l'efficacité réduite des bulles à générer des harmoniques quand on s'éloigne de la résonance, conformément au calcul présenté en section 1.2.3.

Pour résumer les expériences menées sur le nuage de bulles créé par électrolyse sur 2 fils de platine, nous constatons une absence de coda<sup>‡‡</sup> à 500 kHz, mais d'importantes non-linéarités à

<sup>‡‡</sup>Le terme "coda" est issu de la géophysique, et désigne le signal incohérent que l'on mesure aux temps supé-

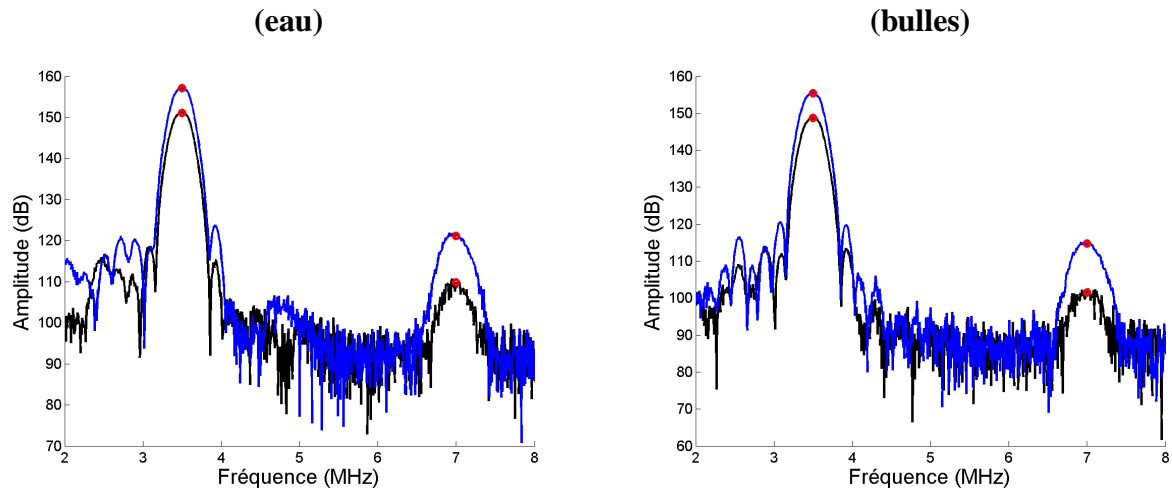


FIG. 2.18 – Spectre des signaux à 3,5 MHz moyennés, enregistrés dans l’eau et dans le nuage de bulles pour une tension de tir de 5 V (noir) et 10V (bleu). Les niveaux du fondamental et de l’harmonique sont repérés par des points rouges. Entre les deux tensions de tir, on relève un gain de 11 dB sur l’harmonique dans l’eau, contre 13 dB dans le nuage de bulles.

cette même fréquence. A 3,5 MHz, on observe un peu de diffusion multiple, beaucoup moins d’absorption qu’à 500 kHz, mais une efficacité de génération non-linéaire réduite.

Pour autant, est-il possible d’observer des non-linéarités dans la faible contribution incohérente à 3,5 MHz, qui seraient intrinsèquement dues aux oscillations non-linéaires des bulles ? Pour répondre à cette question, nous réalisons une expérience dans laquelle la tension d’alimentation du transducteur source est réduite au seuil où l’on n’observe pas de non-linéarités dans l’eau (ou du moins, en deçà du seuil de bruit). Nous présentons sur la figure 2.19 la superposition de 30 signaux temporels acquis en transmission à 3,5 MHz au seuil de non-linéarité, ainsi que leurs spectres.

En raison du faible rapport signal sur bruit, nous ne parvenons donc pas à détecter de non-linéarité dans le signal transmis à 3,5 MHz.

Dans tous les cas, la contribution incohérente au signal transmis dans le milieu créé par électrolyse sur deux fils reste faible, même aux fréquences les plus élevées accessibles expérimentalement. Il est donc nécessaire de densifier le milieu en bulles si l’on souhaite diminuer le libre parcours moyen élastique.

### 2.5.2 Avec une densité plus importante

Pour augmenter la densité du nuage de bulles, nous avons ajouté 8 paires de fils de platine montés sur un bâti en plexiglas, que nous avons disposé dans le flux d’arrivée d’eau. Les bulles générées sont alors moins monodisperses, et visiblement de taille plus importante. On s’attend donc à ce que la diffusion multiple soit favorisée, peut-être au détriment de la non-linéarité du

rieurs à la propagation directe des ondes.

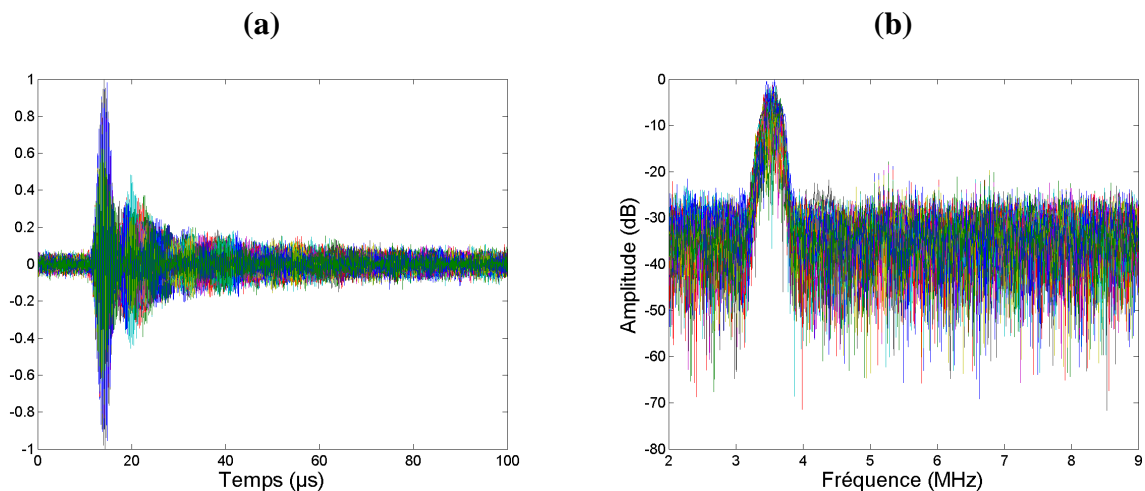


FIG. 2.19 – (a) : Superposition de 30 signaux temporels à 3,5 MHz acquis sur le nuage de bulles généré par électrolyse (30 V) sur 2 fils de platine. La tension d'alimentation du transducteur source est de 1 V, c'est-à-dire le seuil pour lequel on n'observe pas de non-linéarités dans l'eau pure - (b) : Spectres superposés de ces 30 signaux : le rapport signal sur bruit est détérioré, on ne peut donc détecter de non-linéarités.

milieu.

A basse fréquence (500 kHz), le milieu présente une atténuation telle que nous n'avons pu mener d'expérience à des fréquences aussi proches de la résonance des bulles.

Nous représentons sur la figure 2.20 les signaux temporels acquis à 3,5 MHz sur ce milieu plus dense, créé par électrolyse sous 15 et 30 V.

L'augmentation de la tension d'électrolyse se traduit par une augmentation de la densité de bulles. On constate alors une diminution de l'amplitude du signal balistique (figure 2.20) et une augmentation du poids de la contribution incohérente (figure 2.21).

Le signal incohérent s'étend alors sur plus d'une centaine de microsecondes, ce qui nous permet d'affirmer que l'absorption est réduite par rapport aux expériences menées à plus basse fréquence.

Le libre parcours moyen mesuré avec une électrolyse à 15 V est de 15 mm, et 11,5 mm sous 30 V. Nous avons donc réussi à diminuer sa valeur d'un facteur 3 par rapport à l'expérience où seuls deux fils assuraient la génération des bulles.

Sur un tel milieu, nous avons été en mesure d'enregistrer un renforcement de l'intensité moyenne rétrodiffusée dans la direction incidente d'illumination, qui est une manifestation de l'effet de **rétrodiffusion cohérente**. Cet effet a été mis en évidence pour la première fois en acoustique par Arnaud Tourin, et constitue une illustration des effets conjugués de la réciprocité d'un milieu et de son caractère multidiffuseur [21, 18]. Le cône de rétrodiffusion cohérente présente également un intérêt pratique pour les expérimentateurs : il a en effet été montré que

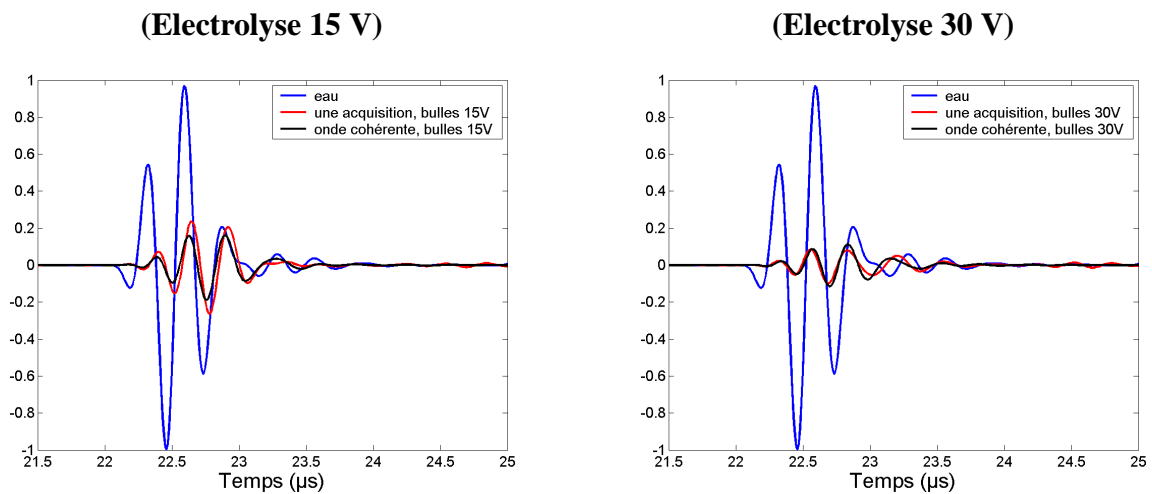


FIG. 2.20 – Signaux mesurés en transmission à 3,5 MHz dans l'eau (bleu) et sur le milieu bulleux créé avec 8 fils de platine alimentés en 15 et 30 V (une acquisition en rouge, onde cohérente en noir)

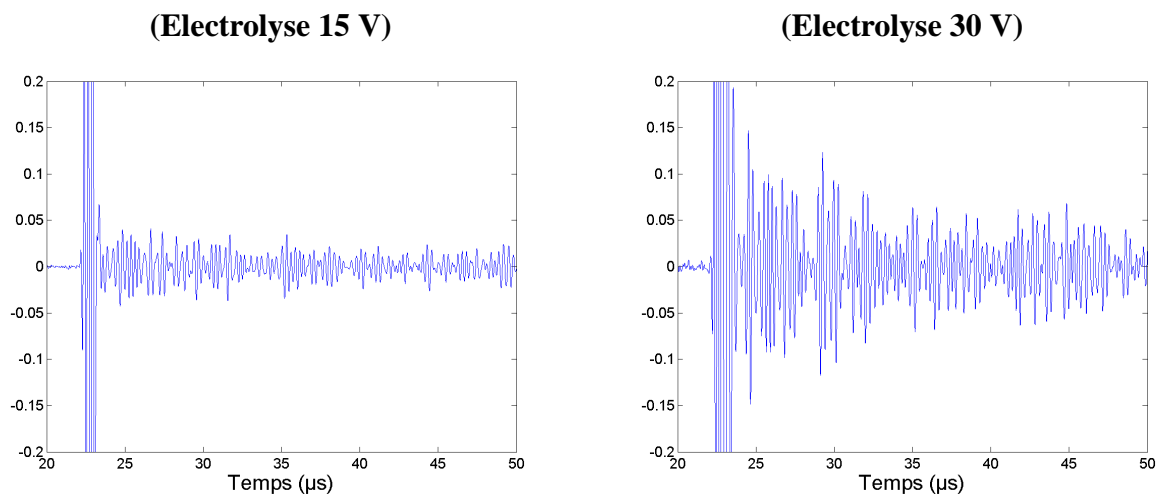


FIG. 2.21 – Signaux mesurés en transmission à 3,5 MHz dans le nuage de bulles créé avec 8 fils de platine alimentés en 15 et 30 V. Le balistique est normalisé à 1, de manière à mettre en évidence la contribution incohérente.

ses caractéristiques permettaient de calculer les paramètres de transport de l'onde acoustique en régime de diffusion multiple [20].

Pour enregistrer le cône de rétrodiffusion cohérente, nous utilisons une barrette de 128 transducteurs ultrasonores à 3,5 MHz, dont on fait émettre une dizaine de périodes par la voie centrale (figure 2.22.a). Les signaux rétrodiffusés par le nuage de bulles sont alors enregistrés par toutes les voies du réseau sur une durée de l'ordre d'une cinquantaine de microsecondes (figure 2.22.b). L'effet de "rétrodiffusion cohérente" apparaît alors quand on moyenne l'intensité des signaux rétrodiffusés en fonction de l'angle "Phi" de réception (figure 2.22.c) sur un grand nombre de réalisations du désordre (figure 2.22.d).

L'apparition d'un renforcement de l'intensité rétrodiffusée dans la direction d'illumination est due à l'interférence constructive entre chemins de diffusion qui visitent les mêmes diffuseurs dans un ordre opposé. Dans le cas où ces chemins de diffusion ont le même poids, l'intensité moyenne mesurée dans la direction opposée à l'illumination est deux fois plus importante que l'intensité rétrodiffusée aux grands angles (liée aux chemins de diffusion empruntant les mêmes diffuseurs dans le même ordre). Ce renforcement de l'intensité rétrodiffusée est plus faible si les chemins qui interfèrent n'ont pas la même amplitude, ou si la diffusion simple ne peut être éliminée [44].

Dans notre cas, la diffusion simple reste importante dans le milieu de propagation (d'autant plus que l'absorption est importante), et nous empêchent d'obtenir un facteur 2 sur l'intensité rétrodiffusée normalisée par celle mesurée aux grands angles.

L'enregistrement du cône de rétrodiffusion sur le milieu dense de bulles, qui n'était pas possible à plus basse fréquence et plus faible densité de bulles, confirme donc la présence de diffusion multiple à 3,5 MHz, même si la contribution de la diffusion simple reste importante.

A cette même fréquence d'excitation, nous filtrons donc les signaux transmis au moyen d'un filtre passe-bande de fréquences de coupure 6.6 et 7.4 MHz, afin de détecter d'éventuels échos non-linéaires à des temps supérieurs à celui de la propagation balistique (figure 2.23).

A 3,5 MHz, l'observation de signal harmonique d'ordre 2 dans la contribution incohérente est difficile, même à forte puissance d'émission. Le niveau du signal obtenu après filtrage reste en effet très proche de celui du bruit. Il existe en revanche un front balistique marqué à cette fréquence, dont on attribue l'origine à la génération non-linéaire dans l'eau.

Il est donc nécessaire de travailler à des fréquences plus basses pour observer davantage de non-linéarités liées aux bulles, quitte à perdre un peu en efficacité de diffusion multiple.

La disponibilité de transducteurs de puissance à 1 MHz nous a permis d'insonifier le nuage de bulles à cette fréquence. Ceux-ci sont des transducteurs initialement destinés au traitement par hyperthermie du cerveau, capables de générer des pressions acoustiques de 2 bars.

En tirant un signal d'amplitude 5V, constitué de 20 périodes à 1 MHz modulé par une fenêtre de Hanning, nous avons tout d'abord pu constater la présence d'une contribution incohérente

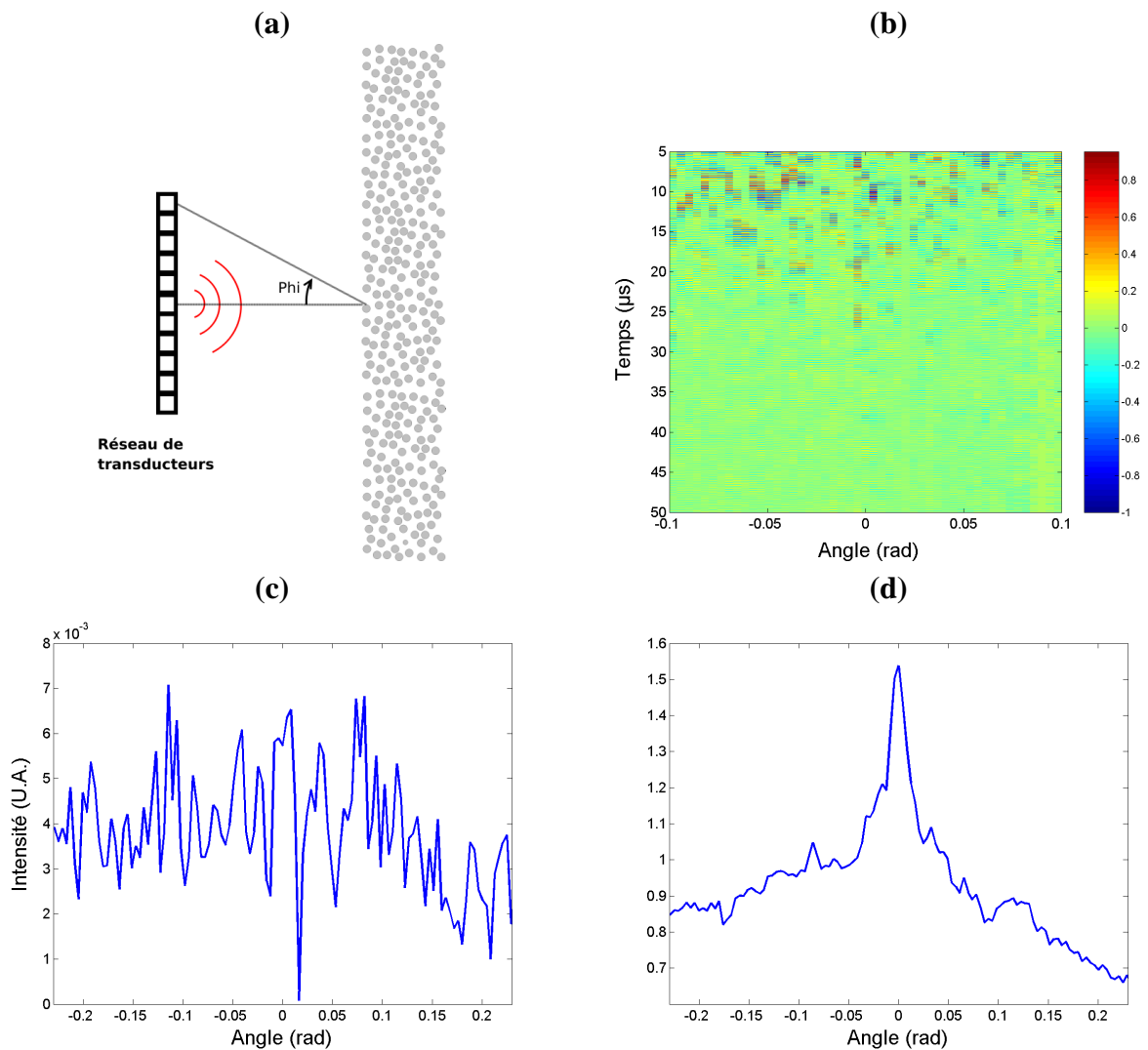


FIG. 2.22 – (a) : dispositif expérimental d’enregistrement du cône de rétrodiffusion cohérente - (b) : signaux rétrodiffusés en fonction de l’angle de réception - (c) : figure de speckle en rétrodiffusion : répartition angulaire de l’intensité rétrodiffusée par le nuage de bulles d’épaisseur 50 mm. La fenêtre d’intégration des signaux temporels est située 7  $\mu$ s après le premier écho reçu et s’étend sur environ 50  $\mu$ s - (d) : intensité moyenne rétrodiffusée en fonction de l’angle.

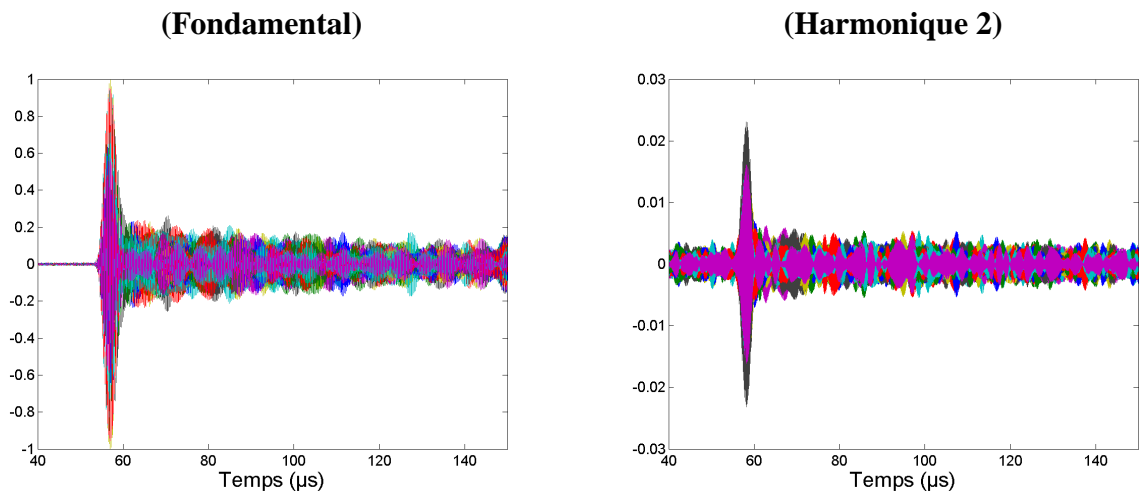


FIG. 2.23 – **(Figure gauche)** : Signaux mesurés en transmission sur 30 acquisitions avec une amplitude de tir de 10 V, filtrés entre 3,3 et 3,7 MHz - **(Figure droite)** : Signaux filtrés entre 6.6 et 7.4 MHz, représentés à la même échelle que le signal à la fréquence fondamentale.

qui s'étend sur plus d'une centaine de microsecondes (figure 2.24 gauche). Ces signaux, une fois filtrés autour de 2 MHz, révèlent des échos non-linéaires sur une durée tout aussi longue (figure 2.24 droite).

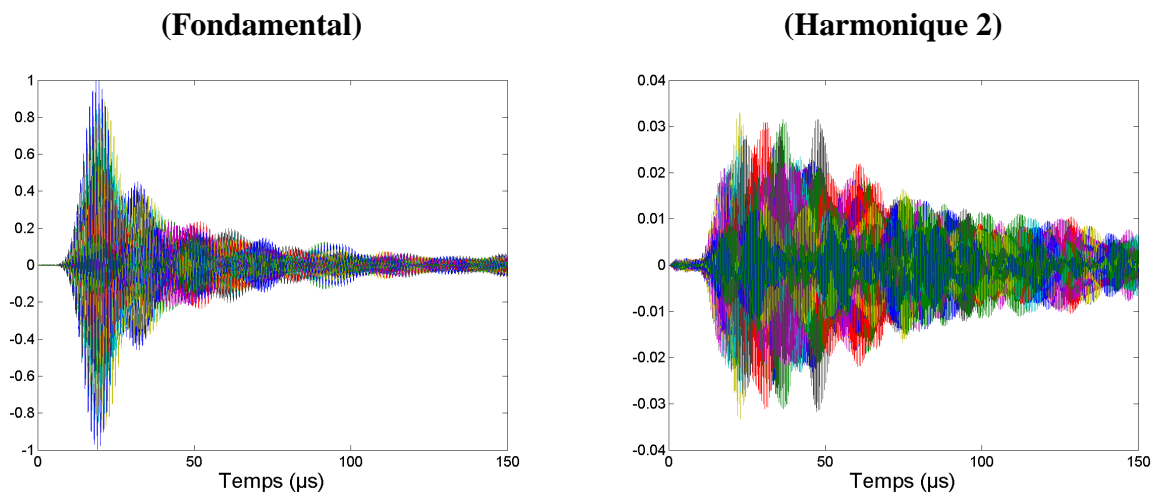


FIG. 2.24 – **(Figure gauche)** : Signaux mesurés en transmission, filtrés entre 900 et 1100 kHz - **(Figure droite)** : Signaux filtrés entre 1.8 et 2.2 MHz. L'échelle du signal harmonique est identique à celle du fondamental. L'amplitude du signal alimentant le transducteur source (5 V) est ici supérieure au seuil de génération d'harmonique dans l'eau.

Pour essayer de déterminer l'origine des non-linéarités que nous observons dans la contribution incohérente au signal transmis, nous diminuons l'amplitude de tir au seuil pour lequel nous



n'observons pas d'harmonique dans l'eau (c'est-à-dire 500 mV). Nous présentons les résultats sur la figure 2.25.

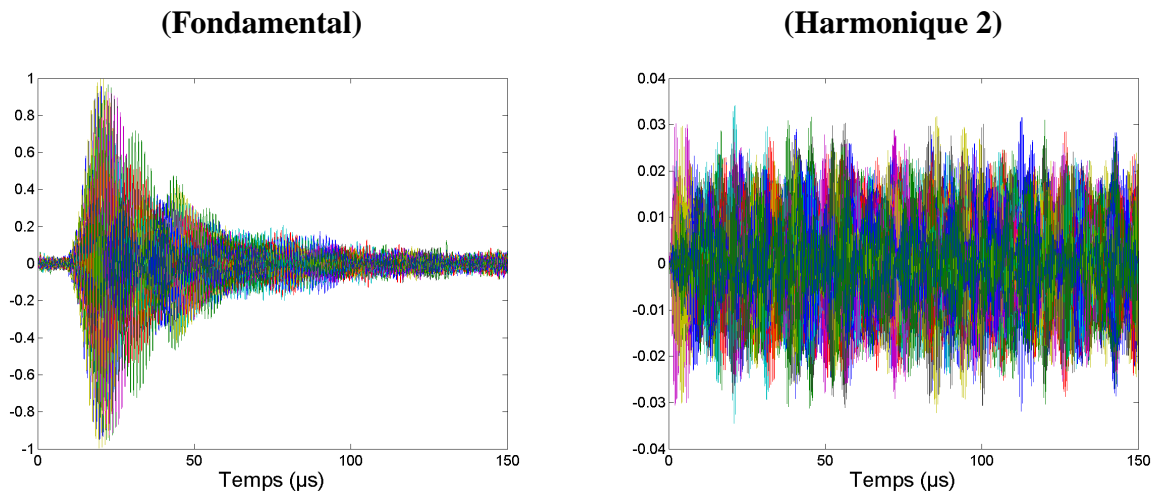


FIG. 2.25 – **(Figure gauche)** : Signaux mesurés en transmission, filtrés entre 900 et 1100 kHz - **(Figure droite)** : Signaux filtrés entre 1.8 et 2.2 MHz. L'échelle du signal harmonique est identique à celle du fondamental. L'amplitude du signal alimentant le transducteur source (500 mV) est telle que l'on n'observe pas de signal harmonique dans l'eau.

Par rapport à la figure 2.24, l'amplitude du bruit dans cette expérience est réhaussée, et le filtrage passe-bande autour de 2 MHz échoue à mettre en évidence un signal non-linéaire qui se distingue du bruit.

En l'absence systématique de détection d'harmoniques dans les nuages de bulles quand les puissances d'émissions sont réduites au seuil pour lequel on n'observe pas de non-linéarité dans l'eau, ces expériences ne nous permettent pas de trancher sur l'origine des harmoniques que nous observons dans la coda.

Nous pouvons donc formuler deux hypothèses quant à l'origine de ces signaux, et aucune expérience ne nous a permis de déterminer laquelle des deux est juste. Soit il s'agit d'harmoniques créées au cours de la propagation dans l'eau, soit il s'agit d'échos non-linéaires créés par les oscillations de forte amplitude des bulles. Dans les deux cas, ces ondes sont ensuite diffusées multiplesment de manière linéaire par le nuage de bulles.

Dans des nuages de bulles de faible densité, nous avons été en mesure de détecter d'importantes non-linéarités dans la propagation acoustique à des fréquences proches de la résonance. Dans la mesure où la contribution incohérente au signal transmis est très faible avec un milieu peu dense, ces non-linéarités ont été mises en évidence sur l'onde cohérente.

Dans des nuages de bulles de densité plus importante, et avec des bulles de plus grand rayon en moyenne, nous avons pu mesurer une réduction importante du libre parcours moyen, dont nous attribuons l'origine à une efficacité de diffusion élastique renforcée, combinée à l'augmentation de la densité. A haute fréquence par rapport aux résonances des bulles (3,5 MHz), nous avons pu observer en transmission une contribution incohérente importante qui s'étend sur plusieurs dizaines de microsecondes.

A des fréquences plus proches des résonances des bulles (1 MHz), nous avons mis en évidence d'importantes non-linéarités dans la coda pour des puissances d'émission élevées. Celles-ci disparaissent quand la puissance d'émission est diminuée au seuil pour lequel on n'observe pas de non-linéarité dans l'eau. Cette expérience ne nous permet donc pas de définir avec précision l'origine des ondes harmoniques que nous enregistrons à des temps supérieurs à celui de la propagation balistique du signal.

Quoi qu'il en soit, ces premières expériences mettent en lumière l'intérêt expérimental de disposer d'une population de bulles de tailles homogènes et parfaitement contrôlées. Il est alors possible de travailler dans des régimes de fréquences où l'absorption peut être évitée sans ambiguïté, ce qui facilite grandement l'interprétation des résultats.

Comme le note P.S. Wilson dans sa thèse de doctorat [41], la grande difficulté du travail sur les assemblées de bulles tient en outre à la variabilité importante des conditions expérimentales d'un instant à l'autre. Cette particularité rend nécessaire la détermination *in situ* des caractéristiques physiques du nuage de bulles dont on acquiert par ailleurs les paramètres de la propagation acoustique.

Enfin, pour étudier le régime de diffusion multiple, une caractéristique importante des nuages de bulles est leur densité : nous avons été en mesure de générer des nuages de bulles dont la distribution des rayons est étroite, mais ceci s'est fait au détriment de la quantité de bulles produites. Il paraît donc nécessaire de poursuivre les efforts expérimentaux pour apprendre à maîtriser la population de bulles créée.

Pour conclure ce chapitre, nous sommes conscients que les résultats présentés ici, en l'absence de détermination systématique des caractéristiques du nuage de bulles et des puissances d'émission, ne présentent qu'une valeur indicative. Ceux-ci témoignent tout de même de la difficulté expérimentale à concilier et mettre en évidence diffusion multiple et non-linéarités des diffuseurs dans un même échantillon en acoustique.



# Bibliographie

- [1] L. L. Foldy, “The multiple scattering of waves,” *Physical Review*, vol. 67, no. 3-4, pp. 107–119, 1945.
- [2] K. W. Commander and A. Prosperetti, “Linear pressure waves in bubbly liquids : Comparison between theory and experiments,” *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 85, no. 2, pp. 732–746, 1989.
- [3] C. Feuillade, “The attenuation and dispersion of sound in water containing multiply interacting air bubbles,” *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 99, no. 6, pp. 3412–3430, 1996.
- [4] F. S. Henyey, “Corrections to foldy’s effective medium theory for propagation in bubble clouds and other collections of very small scatterers,” *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 105, no. 4, pp. 2149–2154, 1999.
- [5] S. G. Kargl, “Effective medium approach to linear acoustics in bubbly liquids,” *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 111, no. 1, pp. 168–173, 2002.
- [6] A. A. Ruffa, “Acoustic wave propagation through periodic bubbly liquids,” *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 91, no. 1, pp. 1–11, 1992.
- [7] M. S. Kushwaha, B. Djafari-Rouhani, and L. Dobrzynski, “Sound isolation from cubic arrays of air bubbles in water,” *Physics Letters A*, vol. 248, no. 2-4, pp. 252–256, 1998.
- [8] C. Goffaux and J. P. Vigneron, “Spatial trapping of acoustic waves in bubbly liquids,” *Physica B : Condensed Matter*, vol. 296, no. 1-3, pp. 195–200, 2001.
- [9] Y.-Y. Chen and Z. Ye, “Propagation inhibition and wave localization in a two-dimensional random liquid medium,” *Physical Review E (Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics)*, vol. 65, no. 5, p. 056612, 2002.
- [10] A. A. Krokhin, J. Arriaga, and L. N. Gumen, “Speed of sound in periodic elastic composites,” *Physical Review Letters*, vol. 91, no. 26, p. 264302, 2003.
- [11] D. Sornette and B. Souillard, “Strong localization of waves by internal resonances,” *Europhysics Letters*, vol. 7, no. 3, pp. 269–274, 1988.
- [12] D. Sornette and J.-P. Bouchaud, “Can strong localization of waves be attained by internal resonances ?,” *Journal de Physique I*, vol. 2, no. 10, pp. 1861–1867, 1992.
- [13] Z. Ye and A. Alvarez, “Acoustic localization in bubbly liquid media,” *Physical Review Letters*, vol. 80, no. 16, pp. 3503–3506, 1998.
- [14] C.-H. Kuo, K. K.-H. Wang, and Z. Ye, “Fluctuation and localization of acoustic waves in bubbly water,” *Applied Physics Letters*, vol. 83, no. 20, pp. 4247–4249, 2003.
- [15] M. Kafesaki, R. S. Penciu, and E. N. Economou, “Air bubbles in water : A strongly multiple scattering medium for acoustic waves,” *Physical Review Letters*, vol. 84, no. 26, pp. 6050–6053, 2000.

- [16] T. Leighton, *The Acoustic Bubble*. Academic Press, 1994.
- [17] E. Silberman, "Sound velocity and attenuation in bubbly mixtures measured in standing wave tubes," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 29, no. 8, p. 925, 1957.
- [18] A. Tourin, A. Derode, P. Roux, B. A. van Tiggelen, and M. Fink, "Time-dependent coherent backscattering of acoustic waves," *Physical Review Letters*, vol. 79, no. 19, pp. 3637–3639, 1997.
- [19] J. D. Rosny and P. Roux, "Multiple scattering in a reflecting cavity : Application to fish counting in a tank," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 109, no. 6, pp. 2587–2597, 2001.
- [20] A. Tourin, A. Derode, A. Peyre, and M. Fink, "Transport parameters for an ultrasonic pulsed wave propagating in a multiple scattering medium," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 108, no. 2, pp. 503–512, 2000.
- [21] A. Tourin, *Diffusion Multiple et Renversement du Temps des Ondes Ultrasonores*. Thèse de doctorat, Université Paris VII, 1999.
- [22] P. Sheng, *Introduction to Wave Scattering, Localization, and Mesoscopic Phenomena*. Academic Press, 1995.
- [23] C. Devin, "Survey of thermal, radiation and viscous damping of pulsating air bubbles in water," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 31, no. 12, pp. 1654–1667, 1959.
- [24] C. S. Clay and H. Medwin, *Acoustical Oceanography : Principles and Applications*. John Wiley & Sons, 1977.
- [25] Z. Ye, "Low-frequency acoustic scattering by gas-filled prolate spheroids in liquids," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 101, no. 4, pp. 1945–1952, 1997.
- [26] E. Zabolotskaya and S. Soluyan, "Emission of harmonic and combination-frequency waves by air bubbles," *Soviet Physics - Acoustics*, vol. 18, pp. 396–398, 1973.
- [27] T. G. Leighton and A. J. Walton, "An experimental study of the sound emitted from gas bubbles in a liquid," *European Journal of Physics*, vol. 8, no. 2, pp. 98–104, 1987.
- [28] S. Prabhukumar, R. Duraiswami, and G. L. Chahine, "Acoustic measurement of bubble size distributions : theory and experiments," tech. rep., Dynaflo Inc., 1996.
- [29] *Validation of Bubble Distribution Measurements of the ABS Acoustic Bubble Spectrometer with High Speed Video Photography*, 2001.
- [30] R. Duraiswami, S. Prabhukumar, and G. L. Chahine, "Bubble counting using an inverse acoustic scattering method," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 104, no. 5, pp. 2699–2717, 1998.
- [31] D. Miller, "Ultrasonic detection of resonance cavitation bubbles in a flow tube by their second-harmonic emissions," *Ultrasonics*, vol. 19, pp. 217–224, 1981.
- [32] A. M. Sutin, S. W. Yoon, E. J. Kim, and I. N. Didenkulov, "Nonlinear acoustic method for bubble density measurements in water," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 103, no. 5, pp. 2377–2384, 1998.
- [33] V. L. Newhouse and P. M. Shankar, "Bubble size measurements using the nonlinear mixing of two frequencies," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 75, no. 5, pp. 1473–1477, 1984.

- [34] A. D. Phelps and T. G. Leighton, “High-resolution bubble sizing through detection of the subharmonic response with a two-frequency excitation technique,” *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 99, no. 4, pp. 1985–1992, 1996.
- [35] J. Y. Chapelon, P. M. Shankar, and V. L. Newhouse, “Ultrasonic measurement of bubble cloud size profiles,” *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 78, no. 1, pp. 196–201, 1985.
- [36] M. Lax, “Multiple scattering of waves,” *Reviews of Modern Physics*, vol. 23, no. 4, p. 287, 1951.
- [37] P. C. Waterman and R. Truell, “Multiple scattering of waves,” *Journal of Mathematical Physics*, vol. 2, no. 4, pp. 512–537, 1961.
- [38] V. Twersky, “On scattering of waves by random distributions. I. free-space scatterer formalism,” *Journal of Mathematical Physics*, vol. 3, no. 4, pp. 700–715, 1962.
- [39] E. L. Carstensen and L. L. Foldy, “Propagation of sound through a liquid containing bubbles,” *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 19, no. 3, p. 481, 1947.
- [40] F. E. Fox, S. R. Curley, and G. S. Larson, “Phase velocity and absorption measurements in water containing air bubbles,” *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 27, no. 3, p. 534, 1955.
- [41] P. S. Wilson, *Sound propagation and scattering in bubbly liquids*. PhD thesis, Boston University College of Engineering, 2002.
- [42] P. S. Wilson, R. A. Roy, and W. M. Carey, “Phase speed and attenuation in bubbly liquids inferred from impedance measurements near the individual bubble resonance frequency,” *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 117, no. 4, pp. 1895–1910, 2005.
- [43] V. Leroy, *Bulles d’air dans l’eau : couplage d’oscillateurs harmoniques et excitation paramétrique*. Thèse de doctorat, Université Paris VII, 2004.
- [44] T. Wellens, B. Gremaud, D. Delande, and C. Miniatura, “Coherent backscattering with nonlinear atomic scatterers.” <http://fr.arxiv.org/abs/cond-mat/0411555>.
- [45] A. Derode, P. Roux, and M. Fink, “Robust acoustic time reversal with high-order multiple scattering,” *Physical Review Letters*, vol. 75, no. 23, pp. 4206–4209, 1995.



# Conclusion

Au cours de cette thèse, nous nous sommes intéressés à divers aspects de la propagation d'une onde ultrasonore dans des milieux hétérogènes périodiques et désordonnés.

Les milieux périodiques conçus nous ont permis de monter des expériences acoustiques originales, qui sont autant de tentatives de transposer à l'échelle macroscopique des phénomènes qui se manifestent à l'échelle de l'infiniment petit.

En particulier, nous avons pu observer dans un premier temps un analogue de l'effet tunnel dans les cristaux phononiques, qui se traduit par un temps de groupe très faible, et indépendant de l'épaisseur de cristal traversée. Cet étonnant effet s'interprète sur la base d'un mécanisme d'accumulation et de restitution d'énergie, ce qui permet d'expliquer la saturation du temps de groupe pour de fortes épaisseurs de cristal.

En outre, nous avons vu que la modélisation des cristaux phononiques s'inspirait dans une grande mesure de méthodes issues de la physique des solides. Par la suite, ces méthodes nous ont permis de simuler la propagation acoustique dans des structures plus complexes que des monocristaux. De plus, nous leur avons trouvé une application originale dans le cadre de l'étude de la focalisation par Retournement Temporel au sein de structures périodiques.

En assemblant deux cristaux phononiques de manière à créer un Fabry-Pérot acoustique, nous avons expérimentalement et théoriquement mis en évidence des résonances en transmission. En l'absence d'absorption, ce phénomène de transmission résonante permet à des paquets d'ondes de traverser la structure sans souffrir d'atténuation notable. En contrepartie, les paquets d'ondes résonants se voient retardés d'un temps qui peut croître exponentiellement en fonction de l'épaisseur des barrières phononiques. Expérimentalement, nous n'avons pas été en mesure de constater cette dépendance exponentielle du temps de groupe aux résonances en fonction de l'épaisseur des monocristaux. Il existe en effet diverses limitations pratiques, dont nous avons cherché à minimiser les effets.

Pour la première fois au laboratoire, nous avons réalisé des expériences de Retournement Temporel dans des échantillons ordonnés. Celles-ci ont révélé une absence d'hyperfocalisation, que nous pensions caractéristique des échantillons multiples diffuseurs. Dans les faits, la présence d'un échantillon hétérogène entre la source initiale et le miroir à Retournement Temporel ne suffit pas pour obtenir une tache focale de dimension inférieure à la limite apparente



de diffraction. Celui-ci doit également assurer une redirection efficace des vecteurs d'onde, et il semblerait que nos échantillons périodiques bidimensionnels n'en soient pas capables dans la gamme de fréquences que nous avons utilisée. Si cela se vérifie, la présence de défauts dans le cristal devrait se traduire par une amélioration de la résolution de focalisation.

Les nuages denses de bulles, qu'ils soient ordonnés ou non, présentent également des bandes de fréquences interdites. Dans un nuage de bulles de mêmes rayons, la première bande interdite (que Hsieh qualifie de "*dead zone*" [6]) intervient juste au dessus de la résonance principale d'une bulle unique, et s'étend sur une large plage de fréquences. L'atténuation des ondes incidentes n'est ici pas due à la périodicité du milieu, mais à la présence de modes collectifs d'excitation des bulles, qui répondent simultanément en opposition de phase au champ incident [43].

Dans les nuages de bulles, l'atténuation mesurée aux fréquences supérieures à la première bande interdite est due essentiellement à l'amortissement radiatif, alors que les phénomènes de dissipation thermiques et visqueux dominent à basse fréquence. L'étude du rapport des sections efficaces de diffusion et d'absorption d'une bulle confirme cette information et montre que les fréquences supérieures d'un facteur 10 à la résonance individuelle de bulles micrométriques sont favorables à l'étude de la diffusion multiple. On exploite alors le régime de sections efficaces géométriques des bulles. Dans la pratique, le régime de diffusion multiple fort qui est prédit à la résonance des bulles au vu de leurs fortes sections efficaces de diffusion n'est envisageable que pour des bulles de taille centimétrique, pour lesquelles la section d'absorption (liée aux processus de dissipation thermique) devient négligeable devant la section de diffusion.

L'objectif initial d'étudier le régime de diffusion multiple non-linéaire a fixé une contrainte supplémentaire. Les non-linéarités des diffuseurs se manifestent en effet essentiellement pour des fréquences proches de la résonance des bulles. Cela nous a contraint à générer des bulles de taille micrométrique, dont les résonances interviennent à des fréquences proches de celles de nos transducteurs piézo-électriques. De fait, l'absorption s'est avérée un obstacle majeur à la mise en évidence d'un régime de diffusion multiple fort. L'observation de non-linéarités dans la contribution incohérente au signal transmis a été le résultat d'un compromis entre efficacité de génération harmonique et diffusion multiple.

Enfin, les puissances d'émission nécessaires pour exciter les bulles de manière non-linéaire aux fréquences supérieures à la résonance sont du même ordre de grandeur que celles permettant la génération d'harmoniques dans l'eau. De fait, il n'a pas été possible de confirmer l'origine exacte des non-linéarités que nous avons observées.

Pour conclure, nous insisterons sur le fait que la création de nuages de bulles de caractéristiques stables et reproductibles est un véritable challenge expérimental, et doit être le préalable à toute expérience visant à déterminer les propriétés acoustiques d'un tel milieu.

# Annexe A

## Table des constantes

Symbole	Dénomination	Valeur
$\rho_{acier}$	masse volumique de l'acier	7850 kg/m <sup>3</sup>
$c_{acier}^l$	vitesse longitudinale dans l'acier	5900 m/s
$c_{acier}^t$	vitesse transverse dans l'acier	3200 m/s
$\rho$ ou $\rho_{eau}$	masse volumique de l'eau	998 kg/m <sup>3</sup>
$\rho_{air}$	masse volumique de l'air	1,2 kg/m <sup>3</sup>
$\chi_{eau}$	compressibilité de l'eau	5.10 <sup>-10</sup> Pa <sup>-1</sup>
$\chi_{air}$	compressibilité de l'air	7,6.10 <sup>-6</sup> Pa <sup>-1</sup>
$c$	vitesse du son dans l'eau	1482 m/s
$c_{air}$	vitesse du son dans l'air	330 m/s
$D$	coefficient de diffusion thermique de l'air	2.10 <sup>-5</sup> m <sup>2</sup> s <sup>-1</sup>
$\gamma$	rapport des capacités calorifiques à pression et volume constants	1,4
$P_0$	pression atmosphérique	10 <sup>5</sup> Pa
$\sigma$	tension de surface eau/air	72 mN/m
$\eta$ ou $\eta_{eau}$	coefficient de viscosité dynamique de l'eau	10 <sup>3</sup> Pa.s

Constantes mesurées à 20°C à pression atmosphérique.



## Annexe B

# Annexe à la méthode de développement en ondes planes

Dans la section 3.2, nous avons montré qu'il était possible d'obtenir les relations de dispersion  $\omega(\mathbf{K})$  d'un cristal phononique infini en résolvant pour chaque vecteur de Bloch  $\mathbf{K}$  et pour tout vecteur  $\mathbf{G}$  du réseau réciproque (RR) le système matriciel

$$\sum_{\mathbf{G}' \in \text{RR}} \sigma(\mathbf{G} - \mathbf{G}')(\mathbf{K} + \mathbf{G})(\mathbf{K} + \mathbf{G}')\phi_{\mathbf{K}}(\mathbf{G}') = \omega^2 \sum_{\mathbf{G}' \in \text{RR}} \eta(\mathbf{G} - \mathbf{G}')\phi_{\mathbf{K}}(\mathbf{G}') \quad (\text{B.1})$$

Le passage de cette relation à une équation matricielle nécessite ensuite de tronquer les sommes sur les vecteurs  $\mathbf{G}$  et  $\mathbf{G}'$  du réseau réciproque, en faisant l'hypothèse que le nombre d'ondes planes pris en compte est suffisant pour assurer la convergence des séries de Fourier.

Cela nous conduit, pour chaque vecteur  $\mathbf{K}$ , à résoudre le système

$$M_{\mathbf{K}}\phi_{\mathbf{K}} = \omega^2(\mathbf{K})N\phi_{\mathbf{K}} \quad (\text{B.2})$$

dans lequel  $\phi_{\mathbf{K}}$  est un vecteur colonne indicé par le vecteur  $\mathbf{G}'$  et  $M_{\mathbf{K}}$  et  $N$  sont deux matrices indicées par les vecteurs  $\mathbf{G}$  et  $\mathbf{G}'$  telles que

$$M_{\mathbf{K}} = \sigma(\mathbf{G} - \mathbf{G}')(\mathbf{K} + \mathbf{G})(\mathbf{K} + \mathbf{G}') \quad (\text{B.3})$$

$$N = \eta(\mathbf{G} - \mathbf{G}') \quad (\text{B.4})$$

Moyennant un réindigage des coordonnées des vecteurs  $\mathbf{G}$  et  $\mathbf{G}'$ , les matrices  $M$  et  $N$  sont bidimensionnelles, et  $\mathbf{G}'$  indice les lignes tandis que  $\mathbf{G}$  indice les colonnes de la matrice.

Cherchons tout d'abord à exprimer la matrice  $N$ .

Cela revient à calculer

$$\eta(\mathbf{G}) = \frac{1}{A} \int_A \frac{1}{\lambda(\mathbf{r})} e^{-i\mathbf{G} \cdot \mathbf{r}} d^2r \quad (\text{B.5})$$

où  $A$  est l'aire de la maille du réseau direct.

Dans la suite, les indices  $a$  et  $b$  désignent respectivement des grandeurs relatives aux inclusions (c'est à dire, les diffuseurs) et au milieu hôte.

Pour  $\mathbf{G} = 0$ ,

$$\eta(0) = \frac{1}{\lambda_a} f_a + \frac{1}{\lambda_b} (1 - f_a) \quad (\text{B.6})$$

avec  $f_a$  la fraction surfacique de diffuseurs dans la maille du réseau direct, et  $\lambda_a = \rho_a c_a^2$  et  $\lambda_b = \rho_b c_b^2$ .

Pour  $\mathbf{G} \neq 0$ ,

$$\eta(\mathbf{G}) = \frac{1}{A} \left( \int_a \frac{1}{\lambda_a} e^{-i\mathbf{G} \cdot \mathbf{r}} d^2 r + \int_b \frac{1}{\lambda_b} e^{-i\mathbf{G} \cdot \mathbf{r}} d^2 r \right) \quad (\text{B.7})$$

$$= \frac{1}{A} \left( \frac{1}{\lambda_a} - \frac{1}{\lambda_b} \right) \int_a e^{-i\mathbf{G} \cdot \mathbf{r}} d^2 r \quad \text{car} \quad \int_{A=a+b} e^{-i\mathbf{G} \cdot \mathbf{r}} d^2 r = 0 \quad (\text{B.8})$$

$$= \left( \frac{1}{\lambda_a} - \frac{1}{\lambda_b} \right) F(\mathbf{G}) \quad (\text{B.9})$$

avec le facteur de structure  $F(\mathbf{G}) = \frac{1}{A} \int_a e^{-i\mathbf{G} \cdot \mathbf{r}} d^2 r$ .

Pour un diffuseur de section circulaire placé au centre de la maille du réseau direct,

$$F(\mathbf{G}) = \frac{1}{A} \int_a e^{-i\mathbf{G} \cdot \mathbf{r}} d^2 r \quad (\text{B.10})$$

$$= \frac{1}{A} \int_0^{r_0} r dr \int_0^{2\pi} e^{-iGr \cos \theta} d\theta \quad (\text{B.11})$$

$$= 2 \left( \frac{\pi r_0^2}{A} \right) \frac{J_1(Gr_0)}{Gr_0} \quad (\text{B.12})$$

$$(\text{B.13})$$

En notant la fraction surfacique de diffuseurs  $f = \pi r_0^2 / A$ , on peut donc exprimer pour  $\mathbf{G} - \mathbf{G}' \neq 0$  les matrices  $M_{\mathbf{K}}$  et  $N$  :

$$M_{\mathbf{K}} = 2f(\mathbf{K} + \mathbf{G}) \cdot (\mathbf{K} + \mathbf{G}') \left( \frac{1}{\rho_a} - \frac{1}{\rho_b} \right) \frac{J_1(|\mathbf{G} - \mathbf{G}'| r_0)}{|\mathbf{G} - \mathbf{G}'| r_0} \quad (\text{B.14})$$

$$N = 2f \left( \frac{1}{\lambda_a} - \frac{1}{\lambda_b} \right) \frac{J_1(|\mathbf{G} - \mathbf{G}'| r_0)}{|\mathbf{G} - \mathbf{G}'| r_0} \quad (\text{B.15})$$

Quand  $\mathbf{G} = \mathbf{G}'$ ,

$$M_{\mathbf{K}} = (\mathbf{K} + \mathbf{G})^2 \left( \frac{1}{\rho_a} f + \frac{1}{\rho_b} (1 - f) \right) \quad (\text{B.16})$$

$$N = \frac{1}{\lambda_a} f + \frac{1}{\lambda_b} (1 - f) \quad (\text{B.17})$$

## Annexe C

# Barrière de potentiel en mécanique quantique

Nous cherchons ici à calculer la matrice de transfert d'une barrière de potentiel simple, telle que représentée sur la figure C.1.

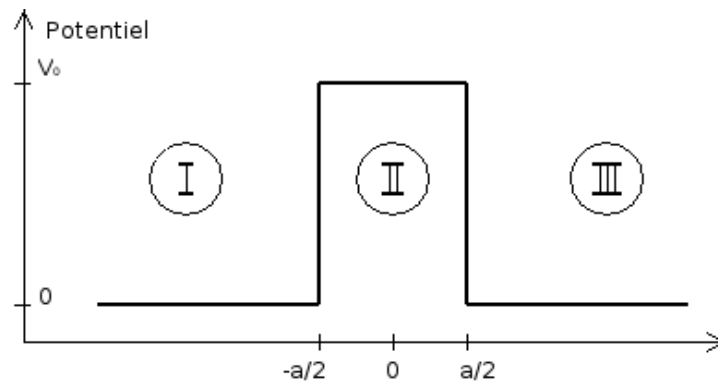


FIG. C.1 – Barrière de potentiel simple.

Soit une onde plane  $Ae^{ikx}$  incidente sur la barrière de potentiel depuis  $-\infty$  (on oublie la dépendance temporelle en  $e^{-i\omega t}$ ), telle que  $\hbar^2 k^2 / 2m = E < V_0$ .

- Dans la zone I, la fonction d'onde  $\Psi$  est la superposition de l'onde incidente et de l'onde réfléchie :  $\Psi = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$ .
- Dans la barrière de potentiel (zone II) ne peuvent exister que des ondes évanescentes, puisque  $E < V_0$ . La fonction d'onde s'écrit donc comme somme de deux exponentielles croissante et décroissante :  $\Psi = Ce^{-\kappa x} + De^{\kappa x}$ , avec  $\kappa = \sqrt{2m(V_0 - E)}/\hbar$ .
- Dans la zone III, la fonction d'onde redevient propagative :  $\Psi = Fe^{ikx} + Ge^{-ikx}$ .

A et B étant supposés connus, nous cherchons à exprimer F et G. Pour cela, nous utilisons la continuité de la fonction d'onde et de sa dérivée en  $-a/2$  et en  $a/2$ , ce qui nous fournit 4 équations reliant entre eux les coefficients inconnus C, D, F et G.

Le système s'écrit :

$$Ae^{-ika/2} + Be^{ika/2} = Ce^{\kappa a/2} + De^{-\kappa a/2} \quad (C.1)$$

$$Ce^{-\kappa a/2} + De^{\kappa a/2} = Fe^{ika/2} + Ge^{-ika/2} \quad (C.2)$$

$$ikAe^{-ika/2} - ikBe^{ika/2} = -\kappa Ce^{\kappa a/2} + \kappa De^{-\kappa a/2} \quad (C.3)$$

$$-\kappa Ce^{-\kappa a/2} + \kappa De^{\kappa a/2} = ikFe^{ika/2} - ikGe^{-ika/2} \quad (C.4)$$

La résolution de ce système conduit à exprimer A et B en fonction de F et G :

$$A = \left( ch(\kappa a) + i\frac{\varepsilon}{2} sh(\kappa a) \right) e^{ika} F + i\frac{\eta}{2} sh(\kappa a) G \quad (C.5)$$

$$B = -i\frac{\eta}{2} sh(\kappa a) F + \left( ch(\kappa a) - i\frac{\varepsilon}{2} sh(\kappa a) \right) e^{-ika} G \quad (C.6)$$

avec

$$\varepsilon = \frac{\kappa}{k} - \frac{k}{\kappa} \quad (C.7)$$

$$\eta = \frac{\kappa}{k} + \frac{k}{\kappa} \quad (C.8)$$

Nous pouvons alors écrire ces équations sous une forme matricielle plus compacte :

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix} \quad (C.9)$$

avec

$$M_{11} = M_{22}^* = \left( ch(\kappa a) + i\frac{\varepsilon}{2} sh(\kappa a) \right) e^{ika} \quad (C.10)$$

$$M_{12} = M_{21}^* = i\frac{\eta}{2} sh(\kappa a) \quad (C.11)$$

## Annexe D

# Profondeur de champ d'un système optique

Cette annexe concerne le calcul de la profondeur de champ d'un système imageur optique, tel qu'un objectif d'appareil photo, que nous modéliserons par une lentille. On se place dans le cadre de l'optique de Gauss, et on néglige la diffraction de la lumière ainsi que toutes les aberrations des lentilles. Dans ces conditions, l'image d'un objet ponctuel par une lentille est ponctuelle.

Considérons la lentille de la figure D.1. Ses foyers  $F$  et  $F'$  sont à la distance focale  $f$  du centre optique. Le point  $O$  a pour image  $I$  sur le plan image (film ou capteur CMOS), tandis que le point  $O'$  a pour image  $I'$ , qui se trouve en avant du plan image. L'image de  $O$  sera donc nette, alors que celle de  $O'$  sera floue et formera un cercle de diamètre  $e$  sur le capteur.

Pour situer l'objet et l'image, on utilise les formules de Newton avec l'origine au foyer. Si  $m$  est la distance entre l'objet et le foyer objet, et  $m'$  la distance entre l'image et le foyer image, on a classiquement  $mm' = f^2$ . De fait, on vérifie également que  $dd' = f^2$ .

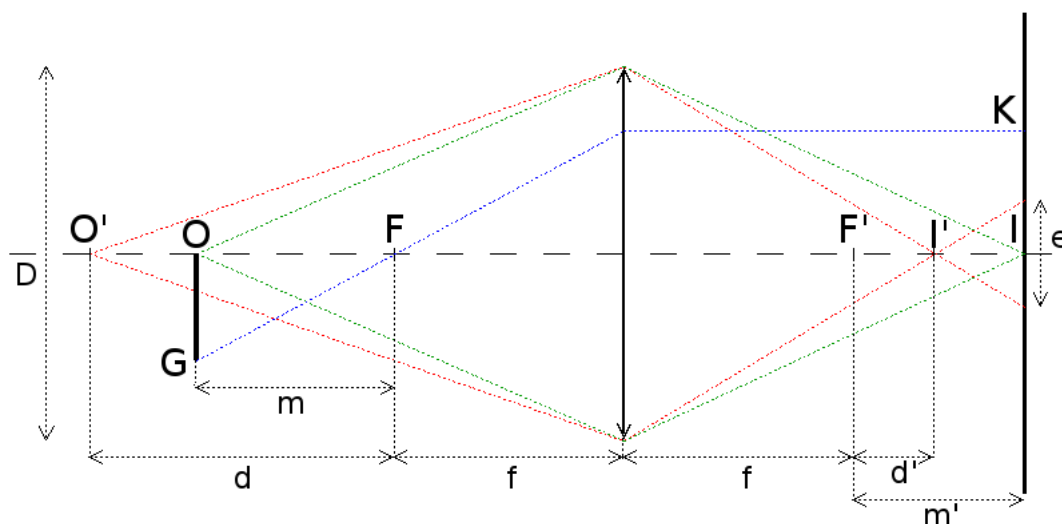


FIG. D.1 – Dispositif de focalisation à base d'une lentille simple, mis au point sur l'objet  $OG$ , à la distance  $f+m$  de la lentille.



L'objet OG a pour image IK. On définit alors le grandissement  $g$  comme le rapport IK/OG. Par construction géométrique, celui-ci vaut  $f/m$ , ou encore  $m'/f$ , en utilisant  $mm' = f^2$ .

Maintenant, nous cherchons à exprimer la distance  $d$  maximale notée  $d_{max}$ , telle que le diamètre du cercle de confusion sur le plan image ait un diamètre  $e$ . Géométriquement, les rayons lumineux formant l'image I' délimitent deux triangles de même sommet, dans lesquels nous appliquons le théorème de Thalès :

$$\frac{m' - d'}{e} = \frac{f + d'}{D} \quad (D.1)$$

d'où l'on tire :

$$\frac{d'}{f^2} = \frac{m'}{f^2} - e \frac{f + d'}{f^2 D} \quad (D.2)$$

En utilisant la relation  $dd' = f^2$ , cela donne :

$$\frac{1}{d_{max}} = \frac{1}{m} - e \frac{f + d'}{f^2 D} \quad (D.3)$$

Quant à la distance minimale de mise au point, on vérifie de même que

$$\frac{1}{d_{min}} = \frac{1}{m} + e \frac{f + d'}{f^2 D} \quad (D.4)$$

Nous faisons maintenant l'approximation que  $f + d' \approx f + m'$ , puisque  $e \ll D$  en général. En notant  $n$  le nombre d'ouverture  $f/D$ , on obtient alors :

$$\frac{1}{d_{max}} = \frac{1}{m} - en \frac{1 + g}{f^2} \quad (D.5)$$

$$\frac{1}{d_{min}} = \frac{1}{m} + en \frac{1 + g}{f^2} \quad (D.6)$$

Pour  $emn(1 + g)/f^2 \ll 1$  (qui est toujours vérifié quand on choisit  $e$  assez petit), on peut développer au premier ordre le système D.5 et D.6, et exprimer la profondeur de champ PDC :

$$PDC = d_{max} - d_{min} = \frac{2en(1 + g)}{g^2} \quad (D.7)$$

Avec l'objectif utilisé,  $g = 1$  au minimum de mise au point, ce qui donne une profondeur de champ de  $4ne$ . On vérifie que la profondeur de champ augmente en fermant le diaphragme, et lorsqu'on définit un cercle de confusion de diamètre plus important.

# Résumé

Au cours de cette thèse, nous nous sommes intéressés à divers aspects de la propagation d'une onde ultrasonore dans des milieux hétérogènes périodiques et désordonnés.

Sur le modèle des échantillons désordonnés de tiges d'acier dans l'eau qui sont étudiés au Laboratoire Ondes et Acoustique, nous avons conçu et caractérisé des échantillons périodiques, que la communauté des acousticiens appelle "cristaux phononiques". Ces matériaux se comportent comme des filtres fréquentiels et présentent un grand intérêt technologique et théorique.

Sur les monocristaux que nous avons construits, nous avons pu mettre en évidence un effet analogue à l'effet tunnel en mécanique quantique. Le temps de groupe à la traversée d'un échantillon périodique aux fréquences de la bande interdite est en effet très faible, et son évolution en fonction de l'épaisseur du cristal sature rapidement.

Nous avons également modélisé nos cristaux au moyen de diverses méthodes (modèle 1D, PWE, MST, FDTD) dont les avantages et caractéristiques sont complémentaires.

Par la suite, nous avons mis en évidence des résonances en transmission dans une structure de type Fabry-Pérot constituée à l'aide de deux cristaux phononiques. L'étude du temps de groupe aux résonances montre un phénomène de piégeage de l'onde dans la cavité résonante, analogue de l'effet tunnel résonant. L'évolution du temps de groupe aux résonances en fonction de l'épaisseur des monocristaux nous a permis de quantifier l'absorption intrinsèque du système.

Enfin, nous avons réalisé des expériences de Retournement Temporel en transmission avec les cristaux phononiques. Celles-ci ont tout d'abord révélé une absence d'hyperfocalisation, qui est une caractéristique du Retournement Temporel en milieu désordonné. En outre, les compressions temporelles que nous avons enregistrées sont dégradées en raison du fort effet de filtrage fréquentiel introduit par le cristal.

Sur la base d'un code numérique prenant en compte la diffusion multiple dans le cristal, nous avons calculé la focalisation spatiale par Retournement Temporel quand la source initiale se trouve dans le cristal. Dans la limite des grandes longueurs d'onde, nous avons observé une amélioration de la résolution de focalisation en rapport avec les caractéristiques du milieu effectif.

Nous avons ensuite cherché à mettre en évidence la diffusion multiple en régime non-linéaire dans les nuages de bulles. A cet effet, nous avons conçu un dispositif expérimental qui nous a permis de générer des populations de bulles relativement stables et contrôlées. Plusieurs méthodes de caractérisation de la fonction de distribution de rayon des bulles ont été mises en œuvre, et l'une d'elles nous a permis d'estimer la fraction volumique de bulles. Bien que le régime de diffusion multiple fort reste hors d'atteinte avec les faibles concentrations de bulles obtenues, nous sommes parvenus à mettre en évidence des non-linéarités d'ordre 2 dans la contribution incohérente au signal transmis. Leur origine exacte reste incertaine.

